ΔΙΑΛΕΞΗ 4

Θεώρημα έργου ενέργειας.

Στο σημείο 1 το σώμα μάζας m έχει ταχύτητα υ_1

—"— —"— 2 —"— —"— —"— —"— —"— —"— υ_2

Ενδιάμεσα δρα μια δύναμη F (σε γένει μη σταθερή) και το έργο της είναι εξ' ορισμού

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} \qquad \text{σε 1 διάσταση} \qquad W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

Τότε $W = \Delta K$ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΡΓΟΥ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ή

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m \upsilon_2^2 - \frac{1}{2} m \upsilon_1^2}$$

ΙΣΧΥΕΙ ΠΑΝΤΑ !!!

1 - ΔΙΑΣΤΑΣΗ:

Η δύναμη σε γένει εξαρτάται από την απόσταση x, την ταχύτητα v, τον χρόνο t κ.τ.λ. Στην ειδική περίπτωση όπου η δύναμη εξαρτάται μόνο από την θέση, τότε η δύναμη ονομάζεται διατηρητική και το σύστημα διατηρητικό (ή συντηρητικό). Παραδείγματα

- Δύναμη βάρους $F = B = -mg$ (αντίθετη του y)
- Δύναμη ελατηρίου $F = F_{ελ} = -kx$

Τότε το ολοκλήρωμα του έργου μπορεί να υπολογισθεί (συνήθως εύκολα). Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int F(x)dx$ είναι μια συνάρτηση της θέσης $\tilde{U}(x)$. Το αντίθετο αυτής της συνάρτησης $U(x) = -\tilde{U}(x)$ ονομάζεται **ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ**.

Παράδειγμα

- Βάρος $\tilde{U}(y) = \int F dy = -\int mg\,dy = -mgy \Rightarrow U(y) = mgy$
- Ελατήριο $\tilde{U}(x) = \int F dx = -\int kx\,dx = -\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

Τότε το έργο μεταξύ δυο σημείων 1,2 γίνεται:

Βάρος $W=\int_1^2 F\,dy = -(mgy_2 - mgy_1) = U_1 - U_2 = -\Delta U$

Ελατήριο $W=\int_1^2 F\,dx = -(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2) = U_1 - U_2 = -\Delta U.$

Συνδυάζοντας με το θεώρημα έργου-ενέργειας

$$W = \Delta K = -\Delta U \Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Το άθροισμα $K+U$ ονομάζεται <u>ολική μηχανική ενέργεια</u> και διατηρείται, π.χ.

Βάρος $\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$

Ελατήριο $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$

Επομένως στους υπολογισμούς μας δεν χρειάζεται να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα των έργων κάθε φορά. Αρκεί να γνωρίζουμε την έκφραση της δυναμικής ενέργειας.

Επομένως στην 1-διάσταση ο πιο γενικός ορισμός της δυναμικής ενέργειας είναι

$$U(x) = -\int F(x)\, dx$$

Δηλαδή η δυναμική ενέργεια είναι μείον το ολοκλήρωμα (αόριστο) της δύναμης και αντιστρόφως, η δύναμη είναι το μείον της παραγώγου ~~το~~ της δυναμικής ενέργειας:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

Συνδυασμός διατηρητικών και μη διατηρητικών δυνάμεων.

Εαν έχουμε παρουσία και μη διατηρητικών δυνάμεων $F_{ΜΔ}$ τότε η ολική δύναμη είναι

$$F_{ολ} = F(x) + F_{ΜΔ}$$ και το έργο είναι

$$W = \int_1^2 F_{ολ}\, dx = \int_1^2 F(x)\, dx + \int_1^2 F_{ΜΔ}\, dx =$$

$$= U(x_1) - U(x_2) + \int_1^2 F_{ΜΔ} dx = -\Delta U + W_{ΜΔ}$$

όπου $W_{ΜΔ} = \int_1^2 F_{ΜΔ}\, dx$ το έργο των μη διατηρητικών δυνάμεων.

Συνδυάζοντας με το Θεώρημα έργου - ενέργειας

έχουμε

$$W = \Delta K = -\Delta U + W_{ΜΔ} \Rightarrow$$

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + W_{ΜΔ} \Rightarrow$$

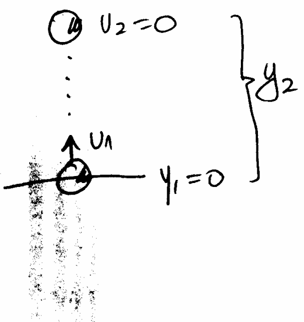
$$\boxed{K_1 + U_1 + W_{ΜΔ} = K_2 + U_2}$$

Πιο γενική διατύπωση.

Δ. Καζούδης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

Παράδειγμα 7-1 Μπάλα μάζας $m = 0{,}150$ kg πετιέται κατακόρυφα, σε ποιό ύψος φτάνει;



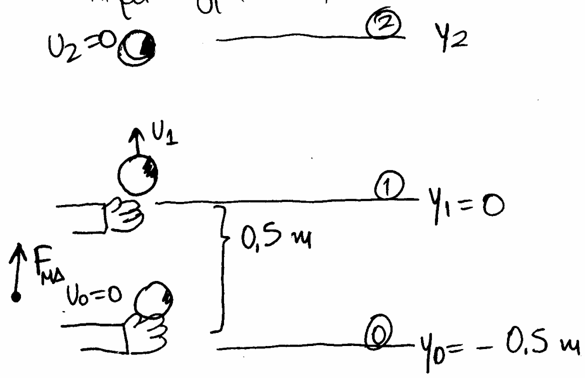
Αγνοώντας τις μη διατηρητικές δυνάμεις (τριβές κ.τ.λ.)

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mg\cancelto{0}{y_1} = \frac{1}{2}m\cancelto{0}{v_2^2} + mgy_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 = \cancel{m}gy_2 \Rightarrow y_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(20\ m/s)^2}{2 \times 9.8\ m/s^2} = 20{,}4\ m$$

Παράδειγμα 7-2



Στο παραπάνω παράδειγμα έστω ότι το χέρι κινείται κατά 0,5 m πριν να φύγει η μπάλα. α) Το χέρι ασκεί μια μη διατηρητική δύναμη $F_{ΜΔ}$ προς τα πάνω για να επιταχύνει την μπάλα. Ποιο είναι το μέτρο αυτής της δύναμης; β) Βρείτε την ταχύτητα υ σε σημείο 15 m πάνω από το σημείο που η μπάλα αφήνει το χέρι.

Λύση:

α). Θεωρώντας σταθερή την $F_{ΜΔ}$ (για απλότητα, ή μπορούμε να πούμε ότι υπολογίζουμε την μέση τιμή της) έχουμε για τα σημεία ⓪, ①:

$$K_0 + U_0 + W_{ΜΔ} = K_1 + U_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m \cancel{v_0^2}^{\,0} + m g y_0 + W_{ΜΔ} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m g \cancel{y_1}^{\,0} \Rightarrow$$

$$(0.15\ kg)(9.8\ m/s^2)\cdot(-0.5\ m) + W_{ΜΔ} = \frac{1}{2}(0.15\ kg)(20\ m/s)^2 \Rightarrow$$

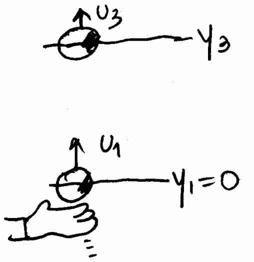
$\Rightarrow W_{ΜΔ} = 31\ J$

Από τον ορισμό του έργου

$$W_{ΜΔ} = \int_0^1 F_{ΜΔ}\,dy = F_{ΜΔ}\int_0^1 dy = F_{ΜΔ}(y_1 - y_0) \Rightarrow$$

$$31\ J = F_{ΜΔ}(0-(-0{,}5m)) \Rightarrow \underline{F_{ΜΔ} = 62\ N}$$

β) Μεταξύ των σημείων ① κ ③ υπάρχει μόνο η διατηρητική δύναμη του βάρους. Επομένως



$$K_1 + U_1 = K_3 + U_3 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mu_1^2 + \cancel{mg y_1}^{\,0} = \frac{1}{2}mu_3^2 + mg\,y_3 \Rightarrow$$

$$\cancel{m}u_3^2 = \cancel{m}u_1^2 - 2\cancel{m}g\,y_3 \Rightarrow$$

$$u_3 = \pm\sqrt{u_1^2 - 2gy_3} = \pm 10 m/s$$

Προσέξτε ότι και τα δύο πρόσημα είναι σωστά (άνοδος - κάθοδος της μπάλας).

Αυτό είναι μια γενική ιδιότητα των διατηρητικών δυνάμεων: το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής κ εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο!!!

Δ. Κουζούδης