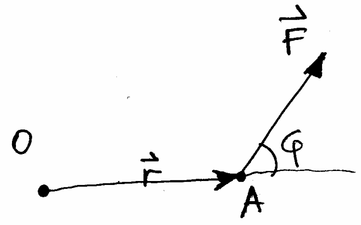
ΔΙΑΛΕΞΗ 5

α) Ορισμός ροπής:



Έστω τυχαία δύναμη $\vec F$, εφαρμόζεται σε σημείο A το οποίο περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\vec r$.

Η ροπή $\vec\tau$ της δύναμης $\vec F$ ως προς το σημείο O είναι εξ' ορισμού

$$\vec\tau = \vec r \times \vec F \quad \text{(εξωτερικό γινόμενο).}$$

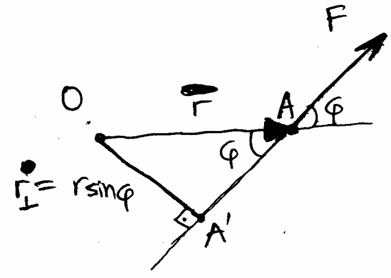
Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου το $\vec\tau$ είναι κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\vec r$ και $\vec F$, δηλαδή την παρούσα σελίδα. Το μέτρο του είναι ίσο με

$$\tau = |\vec\tau| = |\vec r||\vec F|\sin\varphi = rF\sin\varphi$$

β) Φυσική ερμηνεία:

Οι ροπές έχουν να κάνουν με περιστροφές. Εάν το $\vec r$ και το $\vec F$ είναι παράλληλα, τότε $\varphi=0$ και $\tau=0$. Όντως μια δύναμη που είναι κατά μήκος του OA δεν προκαλεί περιστροφή όπως γνωρίζουμε και από την καθημερική μας ερμηνεία.

α) Γεωμετρική ερμηνεία 1.

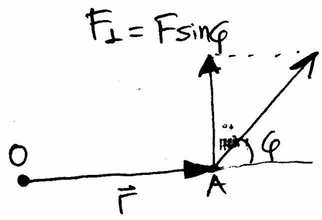


Το ΟΑ' είναι η κάθετη συνιστώσα του $\vec r$ πάνω στον άξονα της δύναμης και ισούται με $r_\perp = r\sin\varphi$

Επομένως το μέτρο της ροπής τ μπορεί να γραφεί και ως $\tau = Fr\sin\varphi = Fr_\perp$

Δηλαδή το μέτρο της ροπής μιας δύναμης ως προς σημείο Ο ισούται με το μέτρο της δύναμης × κάθετη απόσταση του Ο από τον άξονα της δύναμης.

α) Γεωμετρική ερμηνεία 2



Αντίστοιχα μπορούμε να δούμε ότι το $F\sin\varphi$ είναι η κάθετη συνιστώσα F_T της δύναμης πάνω στο $\vec r$

Οπότε $\tau = rF\sin\varphi = rF_\perp$

Αυτό αναμένεται φυσικώς αφού μόνο η συνιστώσα $F_\perp$ της δύναμης F προκαλεί περιστροφή γύρω το O

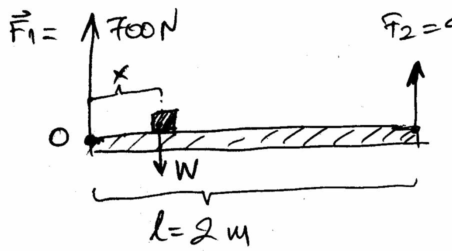
σ) Ισορροπία

Όταν ένα σώμα ισορροπεί, το σύνολο των δυνάμεων και των ροπών πάνω σε αυτό είναι μηδέν

δηλ.: $\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$

και $\Sigma \vec{\tau} = 0$.

σ) Πρόβλημα 11-3



Ποια είναι τα W και x;

Στον άξονα z $\Sigma F_z = 0 \Rightarrow 700 + 400 - W = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{W = 1100 \text{ N}}$

Ροπές ως προς το O:

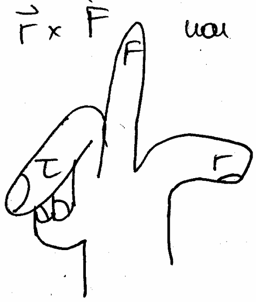
$\tau_1 = F_1 r_1 = 0$

$\tau_2 = F_2 l = 400 \times 2 = 800 \text{ N·m}$

$\tau_W = Wx$

Από τον ορισμό της ροπής

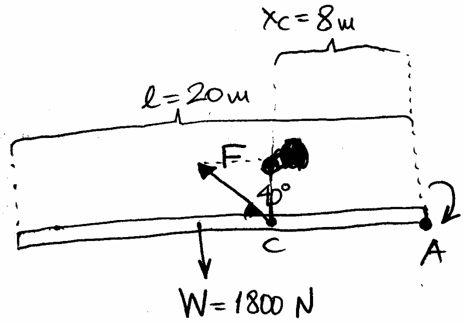
$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ και τον κανόνα του δεξιού χεριού



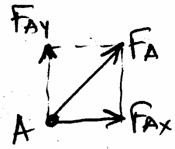
βλέπουμε ότι μια ροπή που προκαλεί περιστροφή αντίθετη των δεικτών του ρολογιού είναι θετική (+) αλλιώς είναι αρνητική (-). Επομένως το σύνολο των ροπών γράφεται $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \cancel{\tau_1}^{0} - \tau_w + \tau_2 = 0 \Rightarrow$

$$-Wx + 800 = 0 \Rightarrow x = \frac{800}{W} = \frac{800}{1100} = 0{,}727m$$

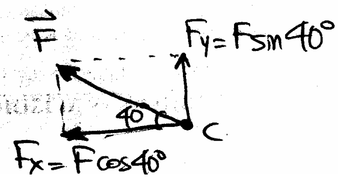
δ) Πρόβλημα 11-5.



Στο A υπάρχει δύναμη αντίδρασης F_A που αποτρέπουν την σκάλα απ' το να φύγει απ' το A. Αναλύουμε την $\vec{F_A}$ σε δύο συνιστώσες



Ομοίως αναλύουμε την $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες στο σημείο C:



Συνθήκες ισορροπίας:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} - F\cos 40^\circ = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} + F\sin 40^\circ - W = 0.$

Τις ροπές έχουμε την ελευθερία να τις πάρουμε ως προς οποιοδήποτε σημείο. Διαλέγουμε το σημείο A και έχουμε

$\tau_W = W x_W = W\frac{\ell}{2} = 1800 \times 10 = 18000 \ N.m$

$\tau_F = F x_c . \sin 40^\circ = F\sin 40^\circ . x_c = F\sin 40^\circ . 8 \ N.m$

Θυμόμαστε ότι οι φορές των ροπών είναι:

$\ominus$ $\oplus$ και έχουμε Δ. Κουζούδης

$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \tau_W - \tau_F = 0 \Rightarrow 18000 - F\sin 40^\circ 8 = 0 \ N.m$

ή $F = \frac{18000}{8\sin 40^\circ} = 35000 \ N$

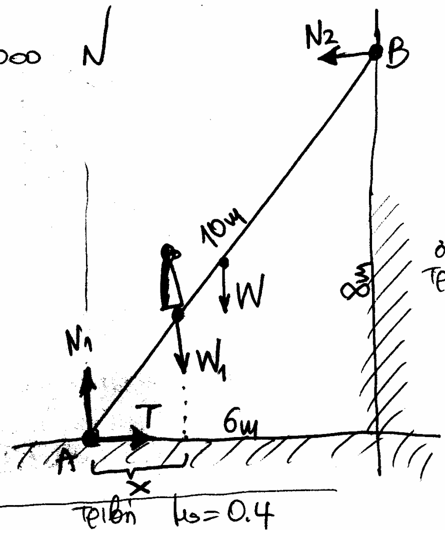
σ) Πρόβλημα 11-10

$W = 400 \ N$

$W_1 = 860 \ N$

Στο B δεν υπάρχει τριβή

Στο A υπάρχει τριβή με συντελεστή στατικής τριβής $\mu_s = 0.4$



α) Ποιά είναι η μέγιστη στατική τριβή T;

β) Πόσο είναι το T όταν ο άνθρωπος είναι 3 m πάνω στη σκάλα;

γ) Πού βρίσκεται ο άνθρωπος όταν η σκάλα αρχίσει να ολισθαίνει;

Λύση:

α) Συνθήκες ισορροπίας

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T - N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = T \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 - W_1 - W = 0 \Rightarrow N_1 = W_1 + W. \quad \boxed{2}$$

Για τις ροπές θυμόμαστε την γεωμετρική ερμηνεία ότι $\tau = Fr\sin\varphi = Fr_\perp$ όπου $r_\perp$ η κάθετη απόσταση της δύναμης απ' το σημείο περιστροφής.

Έτσι ως προς το σημείο A:

$\tau_{W_1} = W_1 x \qquad \tau_W = W \cdot (3m)$

$\tau_{N_2} = N_2 (6m)$

Με τις φορές $(-)$ $(+)$ έχουμε

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow \tau_{W_1} + \tau_W - \tau_{N_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{W_1 x + 3W - 6N_2 = 0} \quad \boxed{3}$$

Αντικαθιστώντας την [1] στην [3] έχουμε:

$$xW_1 + 3W - 6T = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{xW_1 + 3W}{6}} \quad [4]$$

η T αυξάνει όσο αυξάνει το x (δηλαδή όσο ανεβαίνει ο άνθρωπος στη σκάλα). Αυτό αναμένεται και από την φυσική μας διαίσθηση. Όμως πόσο μεγάλη μπορεί να γίνει; Μπορούμε να βάλουμε το μέγιστο μήκος $x = 6m$;

Η στατική τριβή δεν μπορεί να ξεπεράσει την μέγιστη τιμή της που δίνεται από την σχέση $T \leq T_{max} = \mu_s N_1$

Αντικαθιστώντας την [2] έχουμε:

$$T_{max} = \mu_s (W_1 + W) = 0{,}4 \times (860 + 400) = 504\ N$$

β) Όταν ο άνθρωπος βρίσκεται 3 m πάνω στην σκάλα, έχει διανύσει τα $\frac{3m}{10m} = \frac{3}{10}$ της σκάλας και άρα η οριζόντια απόστασή του είναι

$$x = \frac{3}{10}\, 6m = 1{,}8\ m.$$

Από την [4] έχουμε

$$T_1 = \frac{W_1 x + 3W}{6} = \frac{1{,}8 \times 860 + 3 \times 400}{6} = 458\ N$$

γ) Θέλοντας $T = T_{max} = 504\ N$ στην $\boxed{4}$

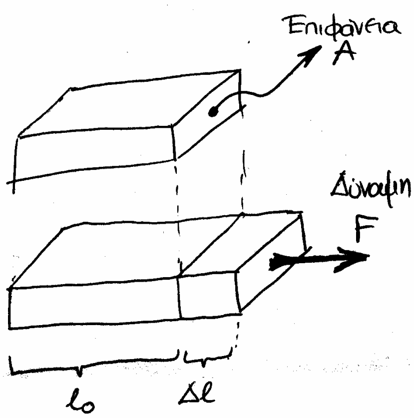
έχουμε: $$T_{max} = \frac{x_{max} W_1 + 3W}{6} \Rightarrow x_{max} = \frac{6T_{max} - 3W}{W_1}$$

ή $$x_{max} = \frac{6 \cdot 504 - 3 \times 400}{860} = 2{,}12\ m$$

Δ Κουτσίδης

ΥΛΙΚΑ - ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Το αντίστοιχο του νόμου του Hook στα ελατήρια μπορεί να εφαρμοσθεί στα υλικά. Συνήθως δοκιμάζουμε υλικά με την μορφή δοκού αρχικού μήκους l_0 και επιφάνεια διατομής A, στα οποία εφαρμόζουμε μια εφελκυστική δύναμη F ούτως ώστε να επιμηκυνθούν κατά Δl.



Ορίζουμε δύο νέες ποσότητες:

1) Τάση εφελκυσμού $\sigma = \frac{F}{A}$ η οποία έχει μονάδες νιέτονς $\frac{N}{m^2} = Pa$

η δύναμη θεωρείται κάθετη στην επιφάνεια αλλιώς παίρνουμε την κάθετη συνιστώσα της

2) Η σχετική παραμόρφωση $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ η οποία είναι αδιάστατη

Για μικρές παραμορφώσεις ισχύει ο νόμος του Hook

$\sigma = G\epsilon$ όπου G: μια σταθερά γνωστή ως το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young

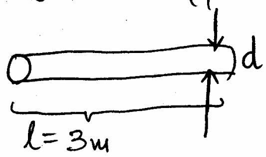
Ο λόγος που δεν χρησιμοποιούμε τον νόμο του ελατηρίου $F = k\Delta l$ είναι ότι η σταθερά k εξαρτάται τόσο από το υλικό όσο και από την γεωμετρία ενώ η σταθερά G εξαρτάται μόνο από το υλικό!!!

Αφού το ϵ είναι αδιάστατο, οι μονάδες του G είναι οι ίδιες με τις μονάδες του σ δηλαδή Pa. Είναι συνήθως της τάξης του 10^{11} Pa π.χ.

Υλικό	G (10^{11} Pa)
Αλουμίνιο	0,7
Χαλκός	1,1
Χάλυβας	2,0

Πρόβλημα 1-19:

Ατσάλινο συρματόσκοινο δεν πρέπει να επιμηκύνεται περισσότερο από 0,2 cm όταν τεντώνεται με δύναμη 300 N. Ποια είναι η ελάχιστη απαιτούμενη διάμετρος του σύρματος;



Λύση: Από πίνακες $G = 2\times10^{11}$ Pa για το ατσάλι. Ο νόμος του Hook δίνει $\sigma = G\epsilon \Rightarrow$

$$\frac{F}{A} = G\frac{\Delta l}{l}$$

όπου A το εμβαδό της κυκλικής διατομής του σύρματος. Λύνοντας ως

Προς

ορια

11

$A = \frac{F\ell}{G\Delta\ell}$ Το εμβαδό του κύκλου είναι $A = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$ οπότε

$$\pi \frac{d^2}{4} = \frac{F\cdot \ell}{G\cdot \Delta\ell} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4}{\pi}\frac{F\cdot \ell}{G\cdot \Delta\ell}} = \sqrt{\frac{4}{3{,}14}\,\frac{300\,N \times 3\,m}{2\times 10^{11}\,\frac{N}{m^2}\; 2\times 10^{-3}\,m}} \Rightarrow$$

$d = 1{,}69 \times 10^{-3}\,m$ ή $d = 1{,}69\,mm$

Δ. Κουζούδης