ΔΙΑΛΕΞΗ 6

ΩΘΗΣΗ.

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί ως

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με το σύνολο των δυνάμεων που δρουν επάνω του.

Για μια δύναμη μόνο, έχουμε

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt$ ολοκληρώνοντας μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 έχουμε

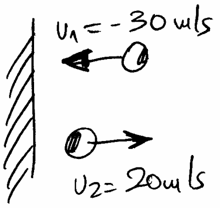
$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται ως η ώθηση της δύναμης $\vec{F}$

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt \qquad \text{ΟΡΙΣΜΟΣ}$$

και λέμε ότι η μεταβολή της ορμής $\Delta\vec{p}$ μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 & t_2 ισούται με την ώθηση Ω.

Παράδειγμα 8-12.



Μπάλα μάζας $m = 0.4$ kg ανακρούεται στον τοίχο α) βρείτε την ώθηση β) εάν η επαφή διαρκεί για 0.01 s βρείτε την μέση δύναμη

α). Από τον ορισμό της ώθησης

$$\vec{\Omega} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m v_2 \hat{x} - (-m v_1 \hat{x}) = m(v_1 + v_2)\hat{x} =$$

$$= 0.4\,kg\,(20 + 30\,m/s)\hat{x} = 20\,kg\cdot\frac{m}{s}\,\hat{x}$$

Δηλαδή η ώθηση είναι προς την θετική κατεύθυνση x

β). Η ώθηση ισούται με

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt .$$

Δ. Κουζούδης

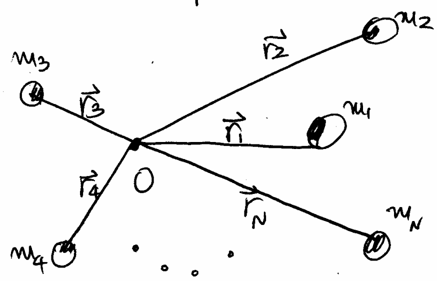
Δε γνωρίζουμε την συνάρτηση $\vec{F}(t)$ αλλά μπορούμε να ορίσουμε μια μέση τιμή $\vec{F}_M$ όπου

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_M\,dt = \vec{F}_M \int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F}_M \Delta t \Rightarrow$$

$\vec{F}_M = \frac{1}{\Delta t}\vec{\Omega}$ άρα και η δύναμη είναι προς την θετική $\hat{x}$ κατεύθυνση με μέτρο $F_M = \frac{1}{\Delta t}\Omega = \frac{20\,kg\cdot m/s}{0{,}01\,s} = 2$ kN

8-6 ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

Όταν έχουμε πολλές μάζες διάσπαρτες σε διάφορα σημεία του χώρου, έχει νόημα να ορίζουμε το "κέντρο μάζας" του συστήματος



Έστω οι μάζες $m_1, m_2, \dots, m_N$ διάσπαρτες στα σημεία του χώρου με διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ αντίστοιχα. Τότε το κέντρο μάζας ορίζεται ως το σημείο αυτό με διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_{K.M.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

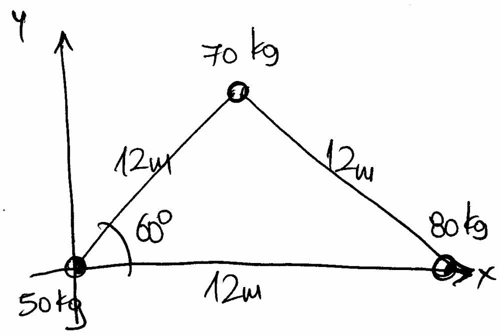
Αναλύοντας σε συνιστώσες

$$x_{K.M.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} \qquad \text{και}$$

$$Y_{K.M.} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

Παράδειγμα 8-15

3 σώματα



$m_1 = 50\ kg \qquad x_1 = 0 \qquad y_1 = 0$

$m_2 = 80\ kg \qquad x_2 = 12\ m \qquad y_2 = 0$

$m_3 = 70\ kg \qquad x_3 = 6\ m \qquad y_3 = 12m \cdot \sin 60^\circ = 10{,}4\ m$

Από τον ορισμό του Κέντρου Μάζας

$$X_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0 + 80 \cdot 12 + 70 \cdot 6\ kg \cdot m}{50 + 80 + 70\ kg} = 6{,}9\ m$$

$$Y_{KM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0 + 0 + 70 \times 10{,}4\ kg \cdot m}{50 + 80 + 70\ kg} = 3{,}64\ m$$

Επειδή το δεξί σώμα είναι βαρύτερο από το αριστερό, "τράβηξε" το κέντρο μάζας προς τα δεξιά για 6,9 m.

Δ. Κουζούδης

Σε συνεχόμενες κατανομές μαζών, το κέντρο μάζας ορίζεται από την σχέση

$$\vec{r}_{K.M.} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

όπου M η συνολική μάζα της κατανομής και dm μια στοιχειώδης μάζα στη θέση $\vec{r}$.

Πρόβλημα 8-73

Να βρεθεί το Κ.Μ. ράβδου μήκους L, μάζας M και ορθογώνιας διατομής A

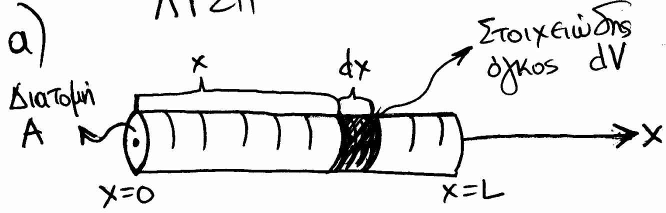
α) σταθερής πυκνότητας

β) πυκνότητας που μεταβάλλεται γραμμικά $\rho = \alpha x$

α: σταθερά

ΛΥΣΗ

α)



Από τον ορισμό του Κ.Μ:

$$X_{KM} = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{L} x\,dm \quad \boxed{1}$$

Διαλέγω ένα κυλινδρικό στοιχειώδες κομμάτι πάχους dx & μάζας dm. Αφού η διατομή είναι σταθερή τότε ο στοιχειώδης όγκος του ισούται με $dV = A\,dx$. Η πυκνότητα του κομματιού αυτού είναι $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{A\,dx} \Rightarrow$

$$dm = \rho A\,dx. \quad \boxed{2}$$

Αφού η πυκνότητα είναι σταθερή, τότε μπορώ να γράψω για όλη την ράβδο

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{AL}.$$

Αντικαθιστώντας στην $\boxed{2}$ & μετά στην $\boxed{1}$ έχω:

$$X_{KM} = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{L} x\,\frac{M}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{L} x\,dx = \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{1}{L}\frac{L^2}{2}$$

ή $\boxed{X_{KM} = \frac{1}{2}L}$ όπως αναμένεται.

β). Τώρα η πυκνότητα εξαρτάται από την απόσταση $\rho = \alpha x$ δηλαδή η ράβδος είναι πυκνότερη προς τα δεξιά. Το στοιχειώδες κομμάτι έχει πυκνότητα $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{A\,dx} \Rightarrow dm = \rho A\,dx =$

$$= \alpha A\, x\, dx$$

Επομένως $$X_{KM} = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{L} x\,dm = \frac{1}{M}\alpha A\int_{x=0}^{L} x^2\,dx$$ ή

$$\boxed{X_{KM} = \frac{\alpha A}{M}\,\frac{L^3}{3}} \quad [1]$$

Το πρόβλημα δεν έχει τελειώσει εδώ, πρέπει να προσδιορισθεί η σταθερά α. Ξέρουμε ότι η ολική μάζα είναι M οπότε ολοκληρώνοντας το dm:

$$M = \int_{x=0}^{L} dm = \int_{x=0}^{L} \alpha A x\,dx = \alpha A\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \alpha A\frac{L^2}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2M}{AL^2}}$$ Αντικαθιστώντας στην [1]:

$$X_{KM} = \frac{2M}{AL^2}\,\frac{A}{M}\,\frac{L^3}{3} \Rightarrow \boxed{X_{KM} = \frac{2}{3}L}$$ δηλαδή το ΚΜ είναι δεξιότερα του μέσου $\frac{1}{2}L$ όπως αναμένονταν.

Δ. Κωτσάκης