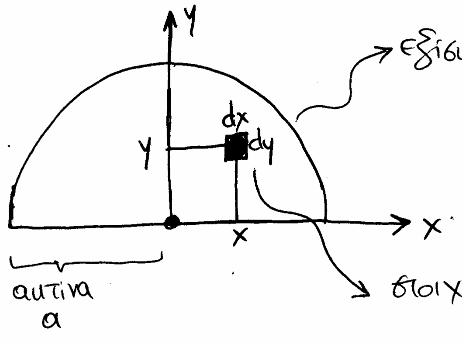
ΔΙΑΛΕΞΗ 7

8

Πρόβλημα 8-74: Υπολογισμός Κ.Μ.

Πάχος t



εξίσωση κύκλου $x^2+a^2=\rho^2$

Πυκνότητα

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi a^2 t}$$

στοιχειώδης μάζα dm

Παίρνω μια στοιχειώδη μάζα dm με όγκο dV που ισούται με $dV = t\,dx\,dy$. Η dm βρίσκεται σε τυχαίο σημείο (x,y). Η πυκνότητα ισούται με $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{t\,dx\,dy} \Rightarrow dm = \rho\, t\, dx\,dy$.

Από τον ορισμό του κέντρου μάζας:

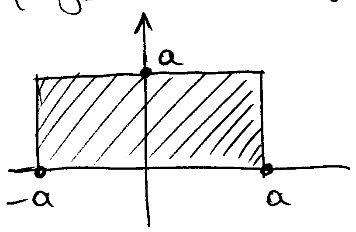
$$x_{KM} = \frac{1}{M}\int x\, dm \quad \text{και} \quad y_{KM} = \frac{1}{M}\int y\, dm.$$

Ας πάρουμε την κάθε ολοκλήρωση ξεχωριστά

α) x_{KM}:

$$x_{KM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\,\rho t \int x\, dx\, dy.$$

Εφόσον έχουμε να κάνουμε με δύο μεταβλητές x και y πρέπει να χρησιμοποιήσουμε διπλό ολοκλήρωμα. Πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί με τα όρια. Εκ πρώτης όψης, μπαίνουμε στον πειρασμό να πούμε ότι τα όρια είναι $x = \pm a$ και $y = 0$ έως a. Αυτό όμως θα αντιστοιχούσε σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο:

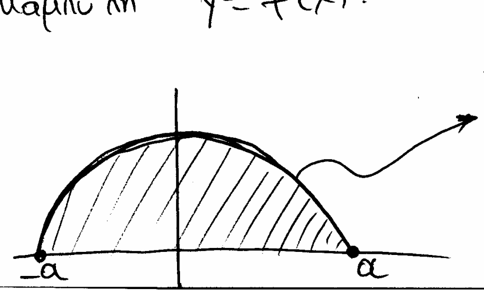


όρια $x = -a$ έως a

$y = 0$ έως a

ΛΑΘΟΣ!

Στη δική μας περίπτωση, όπως το x μεταβάλλεται από $-a$ έως a, το y μεταβάλλεται από 0 έως την πάνω καμπύλη $y = f(x)$:



Όρια $x = -a$ έως a

$y = 0$ έως $f(x)$

ΣΩΣΤΟ!

Ποιά είναι η καμπύλη αυτή; Εφόσον ⑩

έχουμε ημικύκλιο, ξεκινούμε από την εξίσωση

του κύκλου $x^2+y^2=a^2$ και λύνουμε ως προς y:

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$ για το πάνω ημικύκλιο

το y είναι θετικό οπότε $\boxed{y=f(x)=\sqrt{a^2-x^2}}$

Άρα τα όρια είναι

x από $-a$ έως a

y -"- 0 έως $\sqrt{a^2-x^2}$

Η $\boxed{1}$ γίνεται

$$x_{KM}=\frac{1}{M}\rho t\int_{x=-a}^{a} x\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\, dx$$

εκτελούμε πρώτα το μέσα ολοκλήρωμα, αφού τα όριά του είναι συνάρτηση του x.

$$x_{KM}=\frac{1}{M}\rho t\int_{x=-a}^{a} x\left[y\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx=$$

$$=\frac{1}{M}\rho t\int_{x=-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

Το ολοκλήρωμα $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ υπολογίζεται εύκολα εάν παρατηρήσουμε ότι $x\,dx=\frac{1}{2}d(x^2)$.
Μπορούμε επίσης να προσθέσουμε εύκολα μια σταθερά στο διαφορικό $d(a^2-x^2)=d(-x^2)=-d(x^2)$ αφού η διαφόριση της σταθεράς δίνει μηδέν.

Επομένως $x\,dx=\frac{1}{2}dx^2=-\frac{1}{2}dx^2=-\frac{1}{2}d(a^2-x^2)$

Θέτω $z=a^2-x^2$ τότε το πιο πάνω ολοκλήρωμα γίνεται $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{a^2-x^2}\,d(a^2-x^2)=-\frac{1}{2}\int z^{1/2}dz$

το οποίο ολοκληρώνεται εύκολα και δίνει

$-\frac{1}{2}\frac{z^{3/2}}{3/2}=-\frac{z^{3/2}}{3}=-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$ και η $\boxed{2}$ γίνεται:

$$X_{KM}=\frac{1}{M}\rho t\left[-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\right]_{x=-a}^{a}=$$

$$=\frac{1}{M}\rho t\left(-\frac{1}{3}\right)\left\{(a^2-a^2)^{3/2}-(a^2-(-a)^2)^{3/2}\right\}=0 \quad !!!$$

Λόγω συμμετρίας βέβαια το $X_{KM}=0$ είναι αναμενόμενο β) y_{KM}.

Ομοίως, με την διαφορά ότι το $x \to y$ στον ορισμό του κ.Μ. οπότε

$$y_{KM} = \frac{1}{M}\rho t \int_{x=-a}^{a} \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx$$

Και πάλι εκτελούμε το μέσα ολοκλήρωμα πρώτα επειδή είναι συνάρτηση του x. Παίρνουμε

$$y_{KM} = \frac{1}{M}\rho t \int_{x=-a}^{a} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

Δ. Κουζούδης

$$= \frac{1}{2M}\rho t \int_{x=-a}^{a} (a^2-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2M}\rho t \left\{ \int_{x=-a}^{a} a^2 dx - \int_{x=-a}^{a} x^2 dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2M}\rho t \left\{ a^2 \left[x\right]_{-a}^{a} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} \right\}$$

$$= \frac{1}{2M}\rho t \left\{ a^2\, 2a - \frac{1}{3}\left(a^3 - (-a)^3\right) \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y_{KM} = \frac{1}{\cancel{2}M}\rho t \left\{ \cancel{2}a^3 - \frac{\cancel{2}}{3}a^3 \right\} = \frac{2}{3}\frac{\rho t}{M}a^3$$

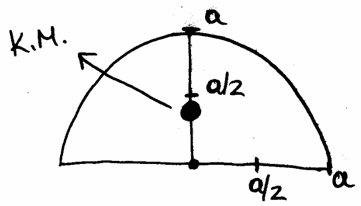
Το σώμα έχει συνολικό όγκο $V = \frac{1}{2}\pi a^2 \cdot t$ και μάζα M οπότε η πυκνότητά του είναι

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi a^2 t}$$

αντικαθιστώντας παραπάνω

$$y_{KM} = \frac{2}{3}\,\frac{M}{\frac{1}{2}\pi a^2 t}\,\frac{t\,a^3}{M} = \frac{4}{3\pi}a$$

Αριθμητικώς $\quad y_{KM} \simeq 0.43\ a$



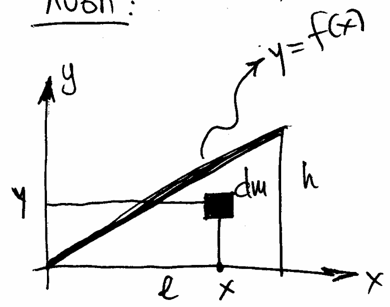
δηλαδή το κέντρο βάρους είναι χαμηλότερο από το μισό του ύψους ~~της~~ της ημικυκλικής πλάκας. Αυτό αναμένεται αφού υπάρχει περισσότερο υλικό στην βάση της πλάκας παρά στην κορυφή της

Δ. Κουζούδης

ΘΕΜΑ 3ο ΦΥΣΙΚΗΣ Ι
Η/Υ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2005

Να υπολογισθεί το κέντρο μάζας ορθογωνίου τριγώνου αμελητέου πάχους, διαστάσεων $\ell \times h$.

Λύση:



Όπως παραπάνω, διαλέγω μια στοιχειώδη μάζα dm με διαστάσεις dx επί dy στο σημείο (x,y). Έστω ότι ρ είναι η μάζα ανά μονάδα επιφανείας του τριγώνου. Τότε $\rho=\frac{dm}{dxdy} \Rightarrow dm=\rho\, dxdy$.

Υποθέτοντας ότι η μάζα είναι κατανεμημένη ομοιόμορφα τότε το ρ είναι σταθερό και ισούται με $\rho=\frac{M}{\frac{1}{2}\ell h}=\frac{2M}{\ell h}$ όπου $\frac{1}{2}\ell h$ το εμβαδό του τριγώνου και M η μάζα του. Αντικαθιστώντας παραπάνω έχουμε $dm=\frac{2M}{\ell h}dx\,dy$. $\boxed{1}$

Από τον ορισμό του Κ.Μ. έχουμε

$x_{KM}=\frac{1}{M}\int x\,dm$ και $y_{KM}=\frac{1}{M}\int y\,dm$ $\boxed{2}$

α) Περίπτωση x_{cm}

Απ' τις $\boxed{1}$ και $\boxed{2}$ έχουμε

$$x_{cm} = \frac{1}{\cancel{M}}\frac{2\cancel{M}}{\ell h}\int x\,dx\,dy$$

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τα όρια ολοκλήρωσης. Εάν το x πηγαίνει από 0 έως ℓ, τότε το y πηγαίνει από 0 έως την καμπύλη $y=f(x)$ (δηλαδή την υποτείνουσα). Με λίγη σκέψη αυτή η καμπύλη είναι η $y=\frac{h}{\ell}x$.

Επομένως

$$x_{cm} = \frac{2}{\ell h}\int_{x=0}^{\ell} x \int_{y=0}^{\frac{h}{\ell}x} dy\,dx =$$

$$= \frac{2}{\ell h}\int_{x=0}^{\ell} x\,[y]_0^{\frac{h}{\ell}x}\,dx = \frac{2}{\ell \cancel{h}}\int_{x=0}^{\ell} x\frac{\cancel{h}}{\ell}x\,dx \Rightarrow$$

$$x_{cm} = \frac{2}{\ell^2}\int_{x=0}^{\ell} x^2\,dx = \frac{2}{\ell^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} = \frac{2}{\ell^2}\frac{\ell^3}{3} = \frac{2\ell}{3}$$

Δηλαδή $\boxed{x_{cm} = \frac{2}{3}\ell}$

Δ. Κουζούδης

β) Περίπτωση y_{KM}
Ομοίως βρίσκουμε

$$y_{KM} = \frac{1}{\cancel{M}} \frac{2\cancel{M}}{\ell h} \int y \, dx dy =$$

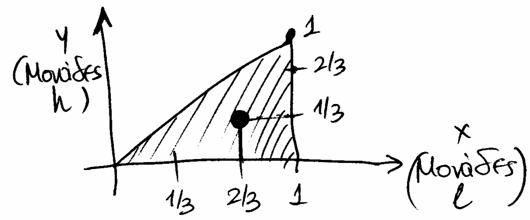
$$= \frac{2}{\ell h} \int_{x=0}^{\ell} \int_{y=0}^{\frac{h}{\ell}x} y \, dy \, dx = \frac{2}{\ell h} \int_{x=0}^{\ell} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{h}{\ell}x} dx =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\ell \cancel{h}} \int_{x=0}^{\ell} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{h^{\cancel{2}}}{\ell^2} x^2 \, dx = \frac{h}{\ell^3} \int_{x=0}^{\ell} x^2 dx =$$

$$= \frac{h}{\ell^3} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{\ell} = \frac{h}{\cancel{\ell^3}} \frac{\cancel{\ell^3}}{3} = \frac{h}{3}$$

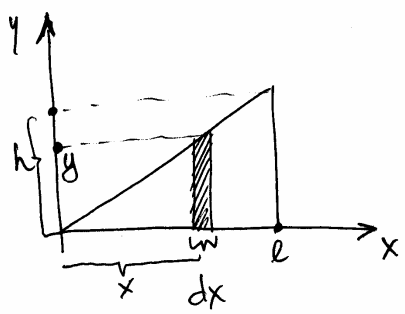
Δηλαδή $y_{KM} = \frac{1}{3} h$.

Παραστατικώς



Δ. Κουζούδης

Λύση 2:



Μπορούμε για στοιχειώδη μάζα να διαλέξουμε μια λωρίδα πάχους dx και ύψους y. Όπως είδαμε η υποτείνουσα περιγράφεται από την εξίσωση $y = \frac{h}{\ell}x$ οπότε η λωρίδα (17)

έχει εμβαδό $dA = dx\,y = \frac{h}{\ell} x\,dx$.

Από τον ορισμό της πυκνότητας $\rho = \frac{dm}{dA} \Rightarrow$

$$dm = \rho\,dA = \rho \frac{h}{\ell} x\,dx.$$

Η x-συνιστώσα του κέντρου Μάζας είναι

$$x_{KM} = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{\ell} x\,dm = \frac{1}{M}\,\rho\frac{h}{\ell}\int_{x=0}^{\ell} x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{M}\rho\frac{h}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} = \frac{1}{M}\rho\frac{h}{\ell}\frac{\ell^3}{3} = \frac{1}{M}\rho\frac{\ell^2 h}{3}$$

Όμως $\rho = \frac{2M}{\ell h}$ όπως είδαμε παραπάνω οπότε

$$x_{KM} = \frac{1}{M}\,\frac{2M}{\ell h}\,\frac{\ell^2 h}{3} = \frac{2}{3}\ell \quad \checkmark$$

Για την εύρεση του y_{KM} εργαζόμαστε παρομοίως αλλά διαλέγουμε τώρα μια οριζόντια λωρίδα. Αυτό αφήνεται σαν άσκηση!

Μ. Βελγάκης -
Δ. Καλζούδης