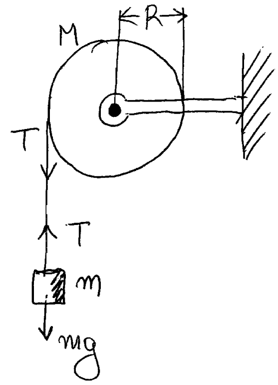
ΔΙΑΛΕΞΗ 8

41. Σώμα μάζας m προσδένεται σιο άκρο νήματος, το άλλο άκρο του οποίο είναι τυλιγμένο σε τροχαλία μάζας M και ακτίνας R. Εαν το σώμα αφεθεί ελεύθερο να βρεθεί με τι επιτάχυνση πέφτει προς το έδαφος.



Λύση:

Στο σώμα ασκείται το βάρος του και η τάση του νήματος. Ο 3ος νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$mg - T = ma \quad \boxed{1}$$

όπου a είναι η γραμμική επιτάχυνση του σώματος.

Εκτός από την κατακόρυφη γραμμική κίνηση, έχουμε και την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας. Στην τροχαλία ασκείται μόνο μια ροπή, αυτή λόγω της τάσης του νήματος T (λόγω δράσης - αντίδρασης το T είναι το ίδιο με αυτό που αισθάνεται το σώμα m). Η ροπή αυτή είναι ίση με $M = T \cdot R$ και προκαλεί γωνιακή ~~περιστροφική~~ επιτάχυνση α σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα:

σύνολο ροπών = (ροπή αδράνειας) × (γων. επιτάχ.)

ή

$$T \cdot R = I \cdot \alpha$$

όμως για κυκλικό δίσκο $I = \frac{1}{2} M R^2$

και η γωνιακή επιτάχυνση σχετίζεται με την γραμμική επιτάχυνση ως $a = \alpha \cdot R$ (αφού $\upsilon = \omega \cdot R$ με παραγώγιση $a = \alpha \cdot R$)

Επομένως $T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2} M a$ $\boxed{2}$

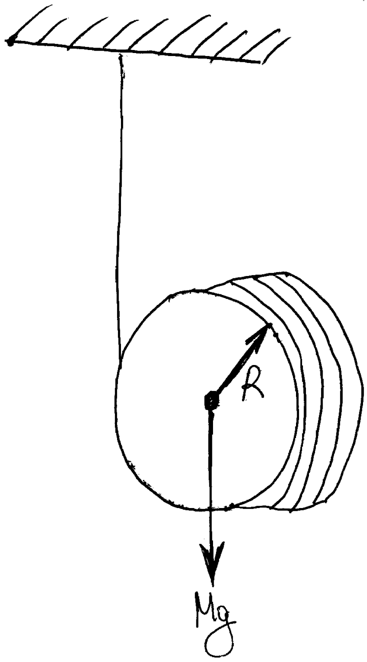
Συνδυάζοντας τις $\boxed{1}$ και $\boxed{2}$ έχουμε

$$mg - \frac{1}{2}Ma = ma \Rightarrow a = \frac{g}{m + M/2}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Παρατηρήστε ότι παίρνουμε τα αναμενόμενα αποτελέσματα για $M=0$ και $M \to \infty$ αφού τότε $a=g$ (ελεύθερη πτώση) και $a \to 0$.

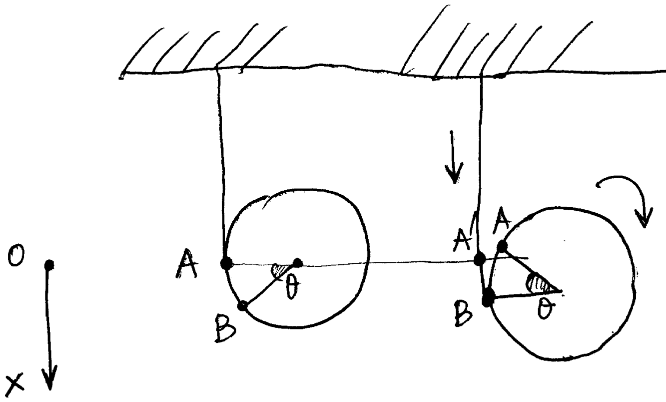
Δ. Κουζούδης

1) Το παιδικό παιχνίδι yo-yo



Λεπτό νήμα είναι περιτυλιγμένο γύρω από ομογενή κυκλικό δίσκο ακτίνος R κ μάζας M. Ο δίσκος αφήνεται ελεύθερος να κινηθεί με το ένα άκρο του νήματος στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Βρείτε α) την τάση του νήματος β) την επιτάχυνση του Κ.Μ. του δίσκου και γ) την ταχύτητα του Κ.Μ. του δίσκου συναρτήσει του ύψους πτώσης h του δίσκου. Τι γίνεται στο κατώτατο σημείο της πτώσης του δίσκου (Άσκηση 10-13 HD Young)

Λύση: Ο δίσκος εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική κ περιστροφική κίνηση. Αυτό φαίνεται στα παρακάτω δύο στιγμιότυπα:



Χρον. στιγμή t_1 Χρον. στιγμή $t_2 > t_1$

Αρχικά δηλαδή το σημείο A βρίσκεται στην οριζόντια θέση. Μετά από πάροδο χρόνου το σημείο B έρχεται στην οριζόντια θέση. Το A έχει μετακινηθεί ενώ η αρχική του θέση είναι η A'. Το νήμα ξετυλίχθηκε σε μήκος όσο είναι το μήκος του τόξου AB δηλαδή

$$A'B = AB$$

όμως η απόσταση A'B είναι η μετατόπιση του κέντρου μάζας. Εάν πάρουμε ότι $t_1 = 0$ και το O του κατακόρυφου άξονα στο σημείο A στο $t=0$, τότε $A'B = x_{cm}$ και

$$A'B = AB \Rightarrow x_{cm} = R \cdot \theta$$

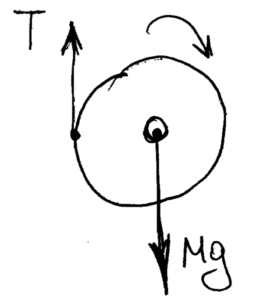
Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο

$$\dot{x}_{CM} = R\dot{\theta} \Rightarrow v_{CM} = R\omega$$ δηλαδή η

ταχύτητα του Κ.Μ. κ η γωνιακή ταχύτητα είναι ανάλογες. Παραγωγίζοντας αυτήν μια φορά παίρνουμε

$$\boxed{a_{CM} = R\,\alpha} \;\boxed{1}$$

Εξετάζουμε τώρα τις δυνάμεις:



$$\Sigma F = M \cdot a_{CM}$$ γραμμική κίνηση

$$\boxed{Mg - T = M a_{CM}} \;\boxed{2}$$

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha$$ περιστροφική κίνηση

$$T \cdot \cancel{R} = \frac{1}{2} M R^{\cancel{2}} \cdot \alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M R \alpha} \;\boxed{3}$$

Από τις $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ κ $\boxed{3}$ παίρνουμε

α) $T = \frac{1}{3} Mg$ κ β) $a_{CM} = \frac{2}{3} g$

δ) Το κέντρο μάζας εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση a_{CM}. Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\upsilon = \upsilon_0 + a_{CM} t$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a_{CM} t^2$$

Αφού το γιο-γιο ξεκινάει από την ηρεμία, $\upsilon_0 = 0$. Επίσης μετράμε από το 0 κ έχουμε $x_0 = 0$ κ το ύψος το ονομάζουμε h. Έτσι

$$\left.\begin{aligned} \upsilon &= a_{CM} t \\ h &= \frac{1}{2} a_{CM} t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = \upsilon / a_{CM} \Rightarrow h = \frac{1}{2} a_{CM} \left(\frac{\upsilon}{a_{CM}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{\upsilon^2}{a_{CM}} \Rightarrow \upsilon^2 = 2 h a_{CM} = 2h \frac{2}{3} g \quad \text{ή}$$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{4}{3} h g}}$$

Όταν τερματίσει το νήμα, η T αυξάνει απότομα ούτως ώστε $T \gg Mg$ και να επιβραδύνει το σώμα ακαριαία.

Μ. Βελλάκης

Δ. Κουζούδης