ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ.

Αρμονική κίνηση είναι η κίνηση που η μεταβλητή της x περιγράφεται από μια συνάρτηση συνημιτόνου ως προς τον χρόνο t:

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\delta)} \quad [1]$$

Οι σταθερές A, ω και δ ονομάζονται αντίστοιχα "πλάτος", "κυκλική συχνότητα" και "σταθερά φάσης".

Δ. Κου[illegible]

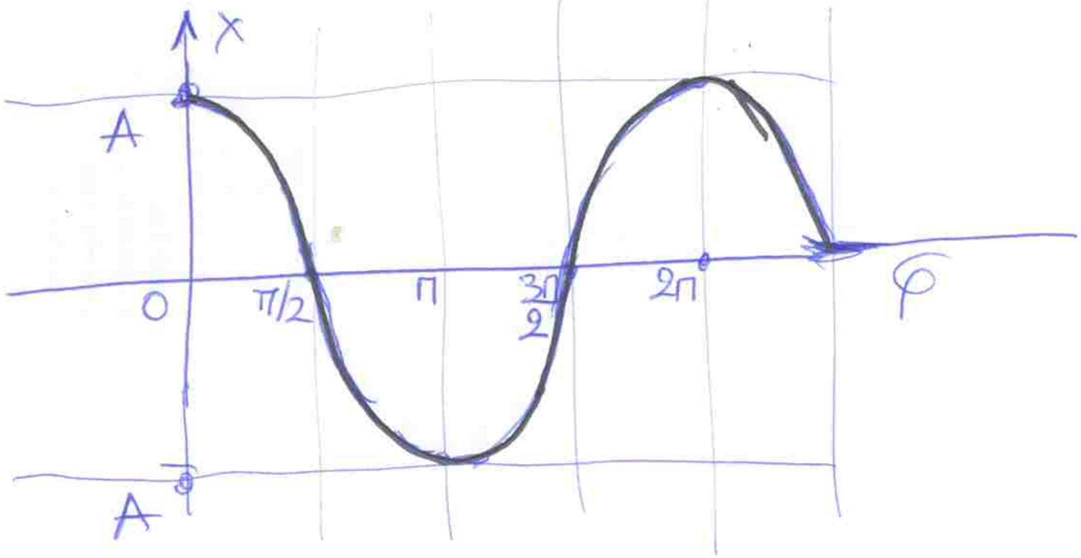
Η μεταβλητή x είναι συνήθως κάποιο μήκος ή γωνία για κινήσεις που παρατηρούμε στην καθημερινή μας ζωή, αλλά η έννοια της ταλάντωσης είναι πιο γενική. Έτσι το x μπορεί να αναπαριστάνει την ένταση E και B πεδίων ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, την πίεση P σε ένα ηχητικό κύμα κ.ό.κ.

Για να δούμε την φυσική σημασία των σταθερών A, ω και δ, αρχικά θέτουμε δ=0 για ευκολία. Η ταλάντωση τότε περιγράφεται από την έκφραση

$$\boxed{x = A\cos\omega t} \quad (2)$$

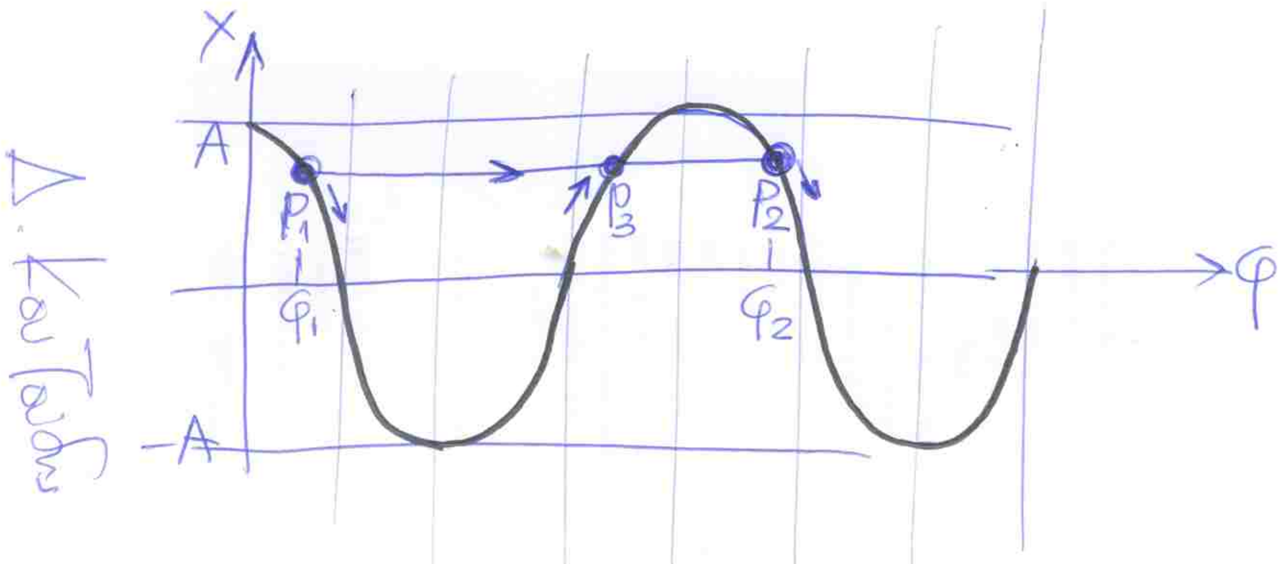
Εάν θέσουμε $\varphi=\omega t$ τότε έχουμε $x = A\cos\varphi$ η γραφ. παράσταση του οποίου φαίνεται παρακάτω.

Σχήμα 1



Βλέπουμε ότι η φ έχει την έννοια της γωνίας και ότι το x είναι περιοδικό με περίοδο της φ ίση με 2π. Η φ=ωt ονομάζεται φάση. Βλέπουμε στην γρ. παράσταση ότι το x είναι περιορισμένο μέσα στην λωρίδα $\pm A$, δηλαδή $-A \leq x \leq A$ και γι' αυτό το A ονομάζεται πλάτος ταλάντωσης, είναι δηλαδή η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει το x.

Ας εξετάσουμε τώρα δύο σημεία P_1 και P_2 πάνω στην γρ. παράσταση που διαφέρουν κατά μια περίοδο ως προς φ, δηλαδή κατά 2π.



Το σημείο P_1 έχει φάση $\varphi_1 = \omega t_1$ ενώ το σημείο P_2 έχει φάση $\varphi_2 = \omega t_2$ & $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$.

Όσον αφορά την κίνηση, τα P_1 και P_2 είναι εντελώς όμοια, δηλαδή έχουν το ίδιο x, και το x και στα δύο σημεία έχει την τάση να μειώνεται (ενώ πχ τα P_1 και

P_3 έχουν ~~το~~ αυτά το ίδιο x, όμως στο P_3 (4)
το x αυξάνει). Λέμε τότε ότι χρονικώς
τα P_1 και P_2 διαφέρουν κατά μια περίοδο
T. Δηλαδή έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ορισμός περιόδου T: Περίοδος T είναι ο
χρόνος $T = t_2 - t_1$ μεταξύ δύο ~~[illegible]~~ στιγμών
μιας ταλάντωσης όπου η αντίστοιχη
διαφορά φάσης $\varphi_2 - \varphi_1 = \omega t_2 - \omega t_1$ ισούται
με 2π.

Δ. Καπαίδης

Από τον παραπάνω ορισμό παίρνουμε

$\omega t_2 - \omega t_1 = 2\pi \Rightarrow \omega(t_2 - t_1) = 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad \boxed{3}$$

~~[illegible]~~

Η φυσική σημασία της περιόδου είναι ο
χρόνος που χρειάζεται η κίνηση για να ολοκληρώσει
ένα πλήρη κύκλο. Μια σχετική έννοια
είναι αυτή της συχνότητας ν που περιγράφει

τον αριθμό των κύκλων που πραγματο- 5
ποιούνται μέσα σε ένα δευτερόλεπτο. Π.χ. για μια ταλάντωση με $T = 0,25$ sec, μέσα σε 1 sec "χωράν" ακριβώς 4 περίοδοι και έτσι

$\nu = 4$ κύκλοι /sec.

Μπορούμε να βρούμε την σχέση μεταξύ ν και T από την απλή μέθοδο των τριών:

Δ. Κατσάκης

σε χρόνο T sec πραγματοποιείται 1 κύκλος
-״- 1 sec -״- ν? κύκλοι

παίρνουμε: $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$ 4

ο) Έτσι πχ για $T = 0,2$ sec, $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5 \; s^{-1}$

Η συχνότητα δηλαδή έχει μονάδες s^{-1}. Καμιά φορά γράφουμε και κύκλους/s αλλά βέβαια ο κύκλος δεν είναι μονάδα αλλά το γράφουμε για συνήθεια για να μας θυμίζει την φυσική σημασία της συχνότητας. Το s^{-1} του δίνουμε το όνομα μιας άλλης μονάδας, το Hertz Hz, δηλαδή $1\,Hz = s^{-1}$

τον αριθμό των κύκλων που πραγματο- 5
ποιούνται μέσα σε ένα δευτερόλεπτο. Π.χ. για μια ταλάντωση με $T = 0{,}25$ sec, μέσα σε 1 sec "χωράν" ακριβώς 4 περίοδοι και έτσι

$\nu = 4$ κύκλοι/sec.

Μπορούμε να βρούμε την σχέση μεταξύ ν και T από την απλή μέθοδο των τριών:

Σε χρόνο T sec πραγματοποιείται 1 κύκλος
-"- 1 sec -"- ν? κύκλοι

παίρνουμε: $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$ (4)

Δ. Κουτσάκης

α) Έτσι π.χ. για $T = 0{,}2$ sec, $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}2} = 5\ s^{-1}$

Η συχνότητα δηλαδή έχει μονάδες s^{-1}. Καμιά φορά γράφουμε και κύκλοι/s αλλά βέβαια ο κύκλος δεν είναι μονάδα αλλά το γράφουμε για ευκολία για να μας θυμίζει την φυσική σημασία της συχνότητας. Το s^{-1} του δίνουμε το όνομα μιας άλλης μονάδας, το Hertz Hz, δηλαδή $1\ Hz = s^{-1}$

Αφού σε κάθε κύκλο το φ μεταβάλλεται κατά 2π, τότε η συνολική μεταβολή της ~~γωνία~~ φάσης φ ισούται με $5 \times 2\pi = 10\pi$

~~[illegible]~~

Άρα το ω ισούται με $\omega = 5 \times 2\pi \ \frac{rad}{s} = 10\pi \ \frac{rad}{s}$

Βλέπουμε ότι οι μονάδες του ω είναι rad/s.

ο) Άλλωστε και από τον ορισμό της φάσης

$\varphi = \omega t$ παίρνουμε $\Delta\varphi = \omega \Delta t \Rightarrow$

$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ και εάν θέσουμε χρόνο Δt ίσο με μια περίοδο, την αντίστοιχη μεταβολή $\Delta\varphi = 2\pi$, έχουμε:

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

ο) Φυσική σημασία της σταθερής φάση δ.

Θα εξετάσουμε τώρα την πιο γενική περίπτωση $\delta \neq 0$. Η κίνηση τότε περιγράφεται από την

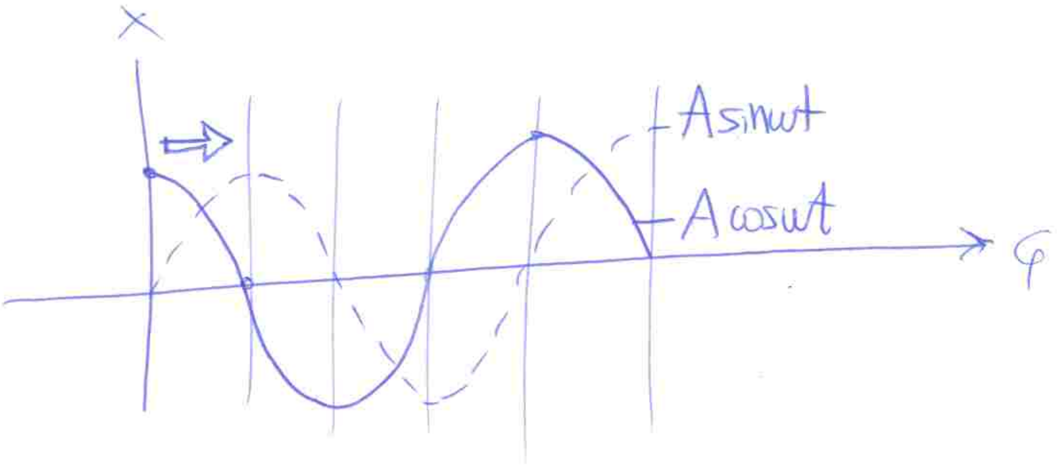
$x = A\cos(\omega t + \delta)$

Δ. Κουτσάκης

Το δ δεν αλλάζει ποιοτικώς την μορφή, αλλά μετατοπίζει την γραφ. παράσταση δεξιά-αριστερά. Πχ. για $\delta = -\pi/2$ παίρνουμε

$$x = A\cos(\omega t - \pi/2) = A\sin(\omega t)$$

Είναι δηλαδή σαν να μετατοπίσαμε την $A\cos\omega t$ δεξιά κατά $\Delta\varphi = \pi/2$:

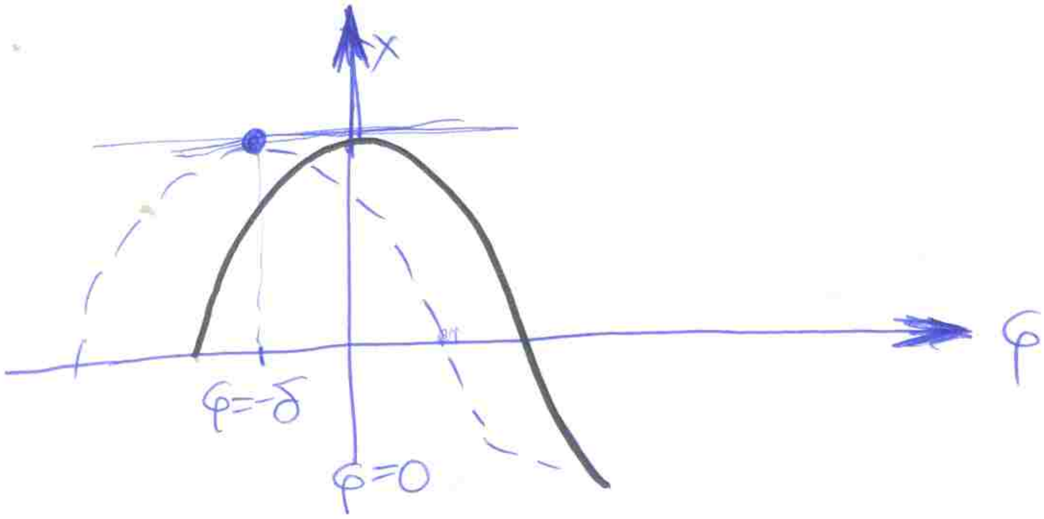


Δ. Κουταλίδης

Ομοίως για τυχαίο δ έχουμε

~~$x=A\cos(\omega t+\delta)$~~ $x = A\cos(\varphi+\delta)$

συμφωνούμε ως εξής: Η $x = A\cos\varphi$ έχει μέγιστο $x=A$ στο $\varphi=0$. Η αντίστοιχη $x = A\cos(\varphi+\delta)$ θα έχει μέγιστο για ~~$\varphi+\delta=0 \Rightarrow \varphi=-\delta$~~ $\varphi+\delta=0 \Rightarrow \varphi=-\delta$. Άρα η γρ. παράσταση έχει μετατοπισθεί αριστερά κατά $-\delta$:



Στην πράξη αποφεύγουμε να χρησιμοποιούμε την σταθερά δ εκτός εάν αυτό δεν είναι δυνατό. Εάν π.χ. καταλήξουμε σε μια κίνηση της μορφής

Δ $$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

αλλάζουμε την κλίμακα χρόνου θέτοντας

$$\omega t + \delta = \omega t' \Rightarrow \quad t' = t + \delta/\omega$$

(δηλαδή μηδενίζουμε το ρολόι μας έτσι ώστε $\delta = 0$) για να έχουμε $x = A\cos(\omega t')$.

Ερώτηση

ο) Ποιες δυνάμεις στην φύση έχουν ως αποτέλεσμα ταλαντωτικές κινήσεις;

<u>Απάντηση</u>: Η δύναμη του ταλαντωτή $F = -kx$

Απόδειξη:

Από τον νόμο του Νεύτωνα $F=ma$

έχουμε $F=m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x}=-kx \Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{x}=-\frac{k}{m}x} \quad \boxed{6}$$

Εάν δοκιμάσουμε $x=A\cos(\omega t+\delta)$ έχουμε:

$$\dot{x}=-A\omega\sin(\omega t+\delta)$$

$$\ddot{x}=-A\omega^2\cos(\omega t+\delta)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω $\boxed{6}$ έχουμε:

Δ. Κουτσίδης

$$-\cancel{A}\omega^2\cancel{\cos(\omega t+\delta)}=-\frac{k}{m}\cancel{A\cos(\omega t+\delta)} \Rightarrow$$

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

Άρα η $\boxed{6}$ έχει ταλαντωτική λύση αρκεί να θέσουμε $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

σ) Οποτεδήποτε έχουμε ένα φυσικό πρόβλημα για κάποια ποσότητα x, εάν μπορούμε να το προσεγγίσουμε ή να το γράψουμε σε μορφή

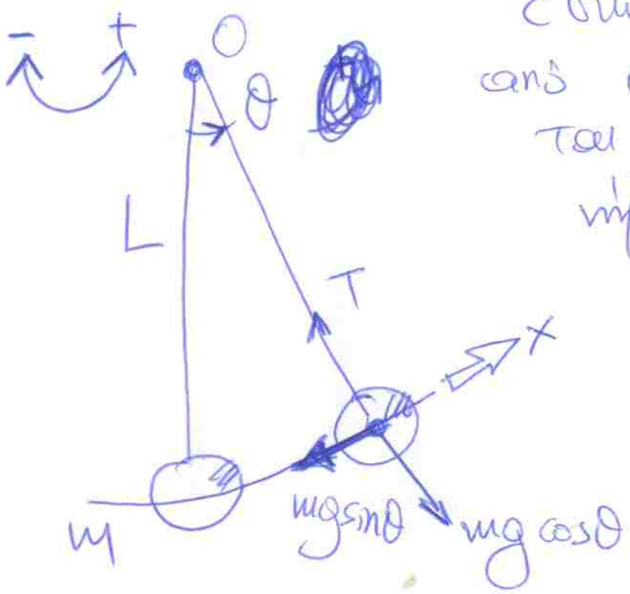
$$\boxed{\ddot{x}=-\omega^2x} \quad 7$$

τότε το πρόβλημα έχει ταλαντωτική λύση

$$x=A\cos(\omega t+\delta).$$

σ) Παράδειγμα: Εκκρεμές. Να βρεθεί η κίνηση που εκτελεί για μικρές γωνίες $\theta <$ ...

Λύση:



Έστω εκκρεμές που αποτελείται από σημειακή μάζα που αναρτάται από σημείο O με αβαρές νήμα μήκους L.

Έστω x η απομάκρυνση της μάζας m κατά μήκος της τροχιάς. Στο σώμα εφαρμόζονται οι δυνάμεις T και το βάρος mg που αναλύεται σε δύο συνιστώσες. Η συνιστώσα $mg\cos\theta$ μαζί με την τάση T του νήματος παίζουν τον ρόλο της κεντρομόλου που κρατάει το σώμα πάνω στην κυκλική τροχιά. Κατά την διεύθυνση x υπάρχει μόνο η δύναμη

$F = -mg\sin\theta$ Το μείον μπαίνει γιατί η F έχει την μορφή δύναμης επαναφοράς, δηλαδή όταν

το x είναι θετικό (δες σχήμα για φορές) Το θ είναι θετικ...

και η f είναι αρνητική. Ανάλογα για x αρνητικό (όταν η m είναι στα αριστερά της κατακορύφου) το θ είναι αρνητικό, το $\sin\theta$ είναι αρνητικό (θεωρούμε ότι η θ δεν υπερβαίνει τις $\pm 90°$) και η f είναι θετική.

Από τον νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$ma = F \Rightarrow m\ddot{x} = f \Rightarrow m\ddot{x} = -mg\sin\theta \Rightarrow$$

$$\ddot{x} = -g\sin\theta$$

Δ. Κουτσίδης

Πρέπει να βρούμε μια σχέση μεταξύ x και θ. Από την απλή γεωμετρία θυμούμαστε ότι το μήκος τόξου x σε ένα κύκλο ισούται με $R\theta$ όπου R η ακτίνα του κύκλου και θ η αντίστοιχη γωνία που τέμνει το τόξο. Έτσι $x = L\theta$ και έχουμε

$$L\ddot{\theta} = -g\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση δεν έχει την επιθυμητή μορφή $\boxed{7}$. Όμως για μικρές γωνίες έχουμε $\sin\theta \simeq \theta$ (προσοχή, αυτό ισχύει μόνο όταν το θ είναι σε rad, δοκιμάστε το σε μια αριθμομηχανή τσέπης)

Έτσι για $\sin\theta \simeq \theta$ έχουμε

$$\ddot{\theta} \simeq -\frac{g}{L}\theta$$

που είναι ακριβώς η έκφραση $\boxed{7}$ με

$\omega^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Η συχνότητα του

εκκρεμούς βρίσκεται από την $\boxed{5}$:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$ (ανεξάρτητη της μάζας m !!!)

Δ. Κουτσίδης

Η ταλαντωτική κίνηση περιγράφεται από την

$$\theta = A\cos(\omega t + \delta)$$

Έχει νόημα να πάρουμε $t=0$ όταν η μάζα βρίσκεται στην κατακόρυφο $\theta = 0$. Έτσι

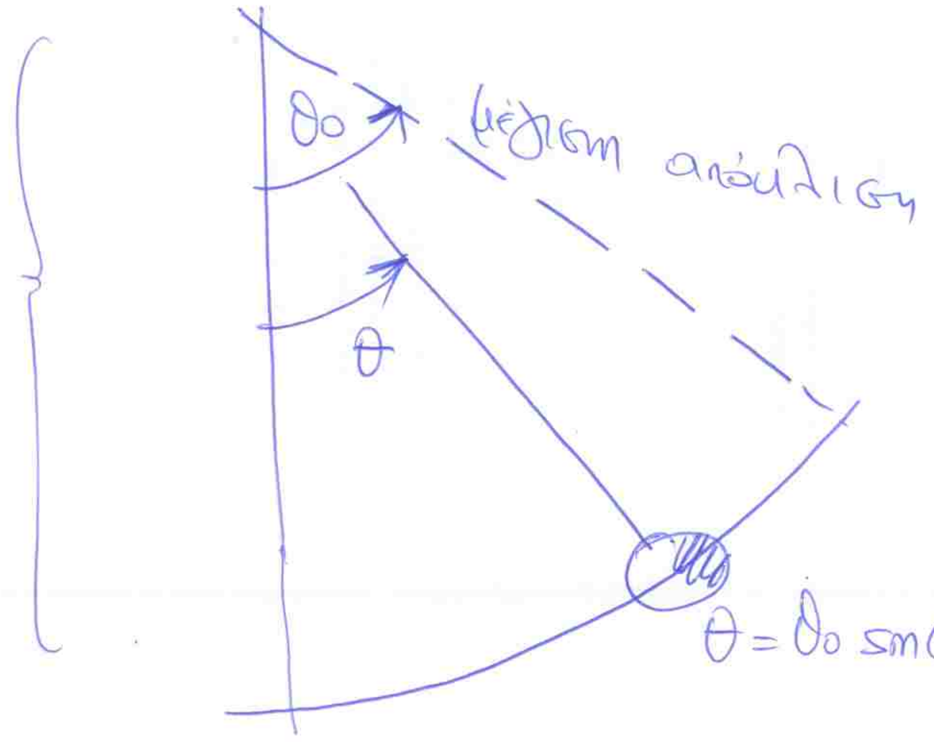
$$0 = A\cos(0+\delta) \Rightarrow \delta = \pm\pi/2$$

Διαλέγουμε το $-\pi/2$ ώστε

$\theta = A\cos(\omega t - \pi/2) = A\sin\omega t$ και να έχουμε

θετικές γωνίες για θετικό χρόνο t.

το Α είναι μια μέγιστη γωνία θ_0 που (14)
φτάνει η μάζα m (εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, πόσο δυνατά ώθηση δώσαμε στο εκκρεμές όταν ηρεμεί στην κατακόρυφο):



$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$$

$\theta = 0$ για $t = 0$

$$\omega = \sqrt{g/L}$$

Δ. Κατσάγης

Παρατηρήστε ότι η συχνότητα εξαρτάται μόνο από το μήκος L και όχι την μάζα m.

α) Παράδειγμα: Πώς θα σχεδιάζατε ένα εκκρεμές ώστε να είχε περίοδο ενός δευτερολέπτου (ώστε να χρησιμοποιηθεί ως ρολόι τοίχου)

Λύση:

Αφού επιθυμούμε $T = 1$ sec, έχουμε $\nu = \frac{1}{T} = 1\ Hz$ και άρα $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\ \frac{rad}{s}$. Από την $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ έχουμε $2\pi = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow (2\pi)^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow$

$$L = \frac{g}{(2\pi)^2} = \frac{9.81\ m/s^2}{(2 \times 3{,}14)\ s^{-2}} \simeq 0{,}25\ m$$

Δηλαδή πρέπει να έχουμε νήμα ίσο με $\frac{1}{4}$ του μέτρου.

Δ. Κουτσάκης

δ) Δυναμική ενέργεια.

Όπως είδαμε σε παλαιότερη διάλεξη σε κάθε συντηρητική (ή διατηρητική) δύναμη αντιστοιχεί και μια δυναμ. ενέργεια. Στην μια διάσταση όπου η f είναι συνάρτηση μόνο του x, η δυναμική ενέργεια U δίνεται από ένα αόριστο ολοκλήρωμα:

$$U = -\int F dx$$

Για ένα ταλαντωτή η δύναμη έχει την μορφή $F = -kx$ και έτσι

$$U = -\int(-kx)\,dx = k\int x\,dx \quad \text{ή}$$

$$U = k\frac{x^2}{2} + c \qquad \text{όπου } c\text{: σταθερά.}$$

Η σταθερά c είναι η δυναμική ενέργεια στην θέση ισορροπίας $x=0$. Εάν διαλέξουμε την δυναμ. ενέργεια να είναι μηδέν σε αυτό το σημείο τότε

$$U = \frac{k}{2}x^2 \quad (\text{Δυναμ. ενέργεια ελατηρίου})$$

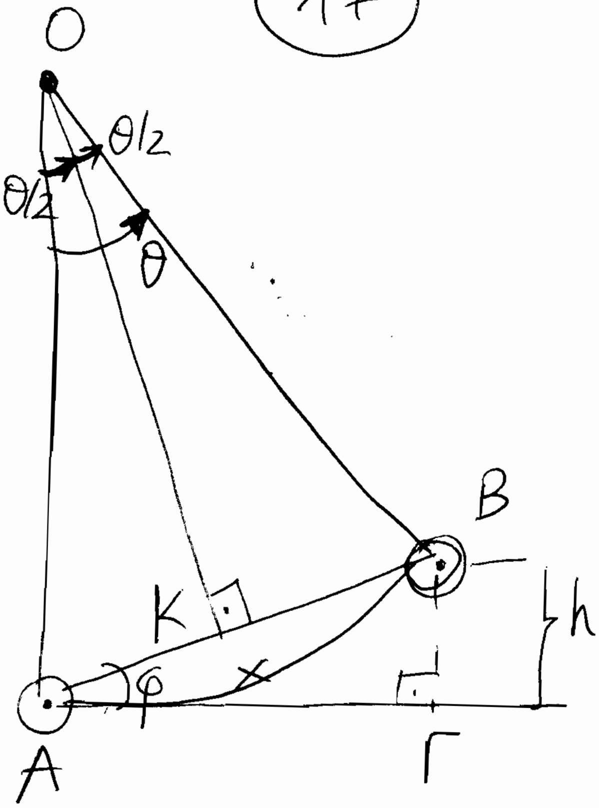
Δ. Κεφάλαιο

α) <u>Παράδειγμα</u>: Στο εκκρεμές παραπάνω είδαμε ότι η δύναμη επαναφοράς είναι

$$F = -mg\sin\theta \simeq -mg\theta = -mg\frac{x}{L}$$

Άρα εδώ το k ισούται με $\frac{mg}{L}$ και η δυναμική ενέργεια είναι $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{L}x^2$

Από πού προέρχεται αυτή η δυναμική ενέργεια; Στην ουσία είναι η βαρυτ. δυναμ. ενέργεια της μάζας και για μικρές γωνίες θ.



Απόδειξη:

Στο σημείο B η βαρυτική δυναμ. ενέργεια της μάζας η εν σχέσει με το σημείο A ισούται με $U = mgh$. Για μικρές γωνίες θ το μήκος x του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι περίπου ίσο με το μήκος της χορδής AKB. Έτσι εάν φ είναι η γωνία $\hat{BA\Gamma}$ τότε $h = \overline{AKB}\,\eta\mu\varphi \simeq x\,\eta\mu\varphi$. Στο τρίγωνο OAB η μεσοκάθετος OK διχοτομεί την γωνία $\theta = \hat{AOB}$ και έτσι $\hat{AOK} = \theta/2$. Η γωνία φ έχει τις πλευρές της κάθετες με την $\hat{AOK}$ και άρα είναι ίσες. Επομένως $\varphi = \theta/2$. Επομένως $h \simeq x\,\eta\mu\varphi = x\,\eta\mu\frac{\theta}{2}$. Για μικρές γωνίες $\eta\mu\frac{\theta}{2} \simeq \frac{\theta}{2}$ και επομένως $h \simeq x\frac{\theta}{2}$. Όμως από την σχέση τόξου-γωνίας έχουμε $x = \theta L$ και έτσι $h \simeq \frac{x^2}{2L}$. Η βαρυτ. δυναμική ενέργεια ισούται με $U = mgh \simeq \frac{1}{2}\frac{mg}{L}x^2$