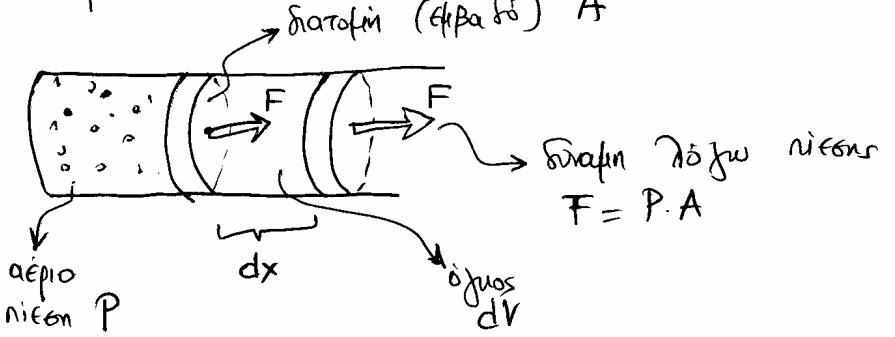
ΔΙΑΛΕΞΗ 11

α) Ορισμός έργου (από την Μηχανική)

στοιχειώδους

$dW = Fdx$

Εάν τα εφαρμόσουμε σε ένα εμβόλο που μετακινείται λόγω της πίεσης του αερίου που έρχεται σε επαφή:



$$dW = \int F dx = \int \frac{F}{A} A dx = \int P A dx = \int P dV$$

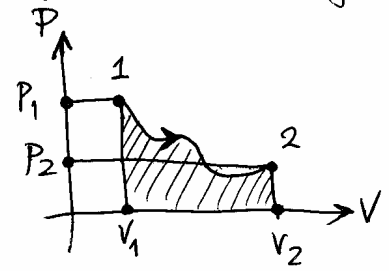
όπου $dV = Adx$ είναι ο όγκος μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης του εμβόλου που ισούται με την αύξηση του όγκου του αερίου. Επομένως όταν αέριο σε πίεση P εκτονωθεί κατά όγκο dV τότε το αέριο παράγει έργο $dW = PdV$.

Το συνολικό έργο μεταξύ δύο καταστάσεων με αρχικό όγκο V_1 και τελικό V_2 είναι:

$$W = \int dW = \int_{V_1}^{V_2} PdV$$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

α) Συνθίζεται στην θερμοδυναμική να παρασταίνουμε διαγράμματα P-V δηλαδή η πίεση στον y-άξονα και ο όγκος στον x-άξονα. Στα διαγράμματα αυτά καταγράφουμε την αρχική και τελική κατάσταση ως δύο σημεία με συντεταγμένες (P_1, V_1) και (P_2, V_2). Εάν γνωρίζαμε και τις ενδιάμεσες τιμές της πίεσης και του όγκου κατά την διάρκεια της μεταβολής, τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε την καμπύλη που περιγράφει την μεταβολή π.χ:



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Γνωρίζαμε από τα Μαθηματικά ότι το $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ ισούται με το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $y=f(x)$, του άξονα -x και των κάθετων ευθειών στα σημεία x_1 και x_2. Στο παραπάνω διάγραμμα το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης περιοχής λοιπόν ισούται με $\int_{V_1}^{V_2} P dV$ και όπως είδαμε παραπάνω είναι το έργο που παράγει το αέριο μεταξύ των κατα-

στάσεων 1 και 2 ακολουθώντας την καμπύλη του σχήματος.

Επομένως

$$\text{ΕΡΓΟ} = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \text{ΕΜΒΔΑΔΟ (γραμμοσκ. περιοχής)}$$

ο) Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί γιατί εξετάζουμε μόνο δύο (P, V) από τις 4 μεταβλητές (P, V, T, n) που σχετίζονται με τα αέρια. Ο λόγος είναι ότι στο πλείστο των περιπτώσεων ο αριθμός n των γραμμομορίων του συστήματος παραμένει σταθερός (δηλαδή έχουμε σταθερό αριθμό μορίων). Επομένως έχουμε ουσιαστικά 3 μεταβλητές P, V, T.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Η T μπορεί να υπολογισθεί από τις P, V μέσω της "καταστατικής εξίσωσης" των αερίων. Π.χ. τα ιδανικά αέρια όπως είδαμε ικανοποιούν την καταστατική εξίσωση

$$PV = nRT$$

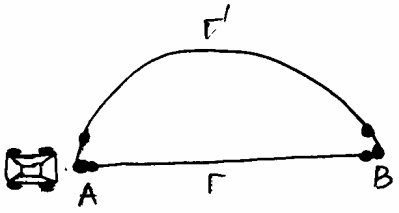
όπου R: n σταθερά των αερίων $8{,}31 \frac{J}{mole \cdot K}$

Τα πραγματικά αέρια ικανοποιούν πιο σύνθετες καταστατικές εξισώσεις αλλά η ιδέα είναι η ίδια, τα P, V και T σχετίζονται

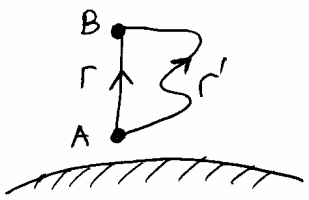
μεταξύ τους μέσω της εξίσωσης οπότε ④ διαλέγουμε δύο απ' αυτά, συνήθως P και V και το τρίτο π.χ. το T προκύπτει από την εξίσωση.

ο). Εξαρτάται το έργο απ' την διαδρομή;

Στην φυσική υπάρχουν δύο ειδών ποσότητες, αυτές που εξαρτούνται από την διαδρομή που ακολουθεί το σύστημα και από αυτές που δεν εξαρτούνται.



Π.χ. το ποσό της θερμότητας που ελκύεται από την τριβή των ελαστικών του αυτοκινήτου. Περιμένουμε να είναι μεγαλύτερο κατά την διαδρομή ΑΓ'Β αντί της ΑΓΒ εσειδή είναι μεγαλύτερη (για την ίδια κατάσταση οδοστρώματος).

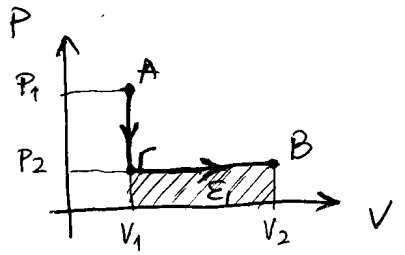


Αντίθετα η δυναμική ενέργεια λόγω του βάρους ενός σώματος μεταβάλλεται το ίδιο είτε διαλέξουμε την διαδρομή ΑΓΒ ή την ΑΓ'Β.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Το έργο $W = \int p\,dV$ στην θερμοδυναμική απλή στην πρώτη κατηγορία, δηλαδή εξαρτάται από την διαδρομή. Ας εξετάσουμε τρεις διαφορετικές διαδρομές στο διάγραμμα p-V με ίδια αρχικά και τελικά σημεία $A(p_1, V_1)$ και $B(p_2, V_2)$ και ας υπολογίσουμε το έργο που παράγεται για την κάθε διαδρομή.

Διαδρομή 1:



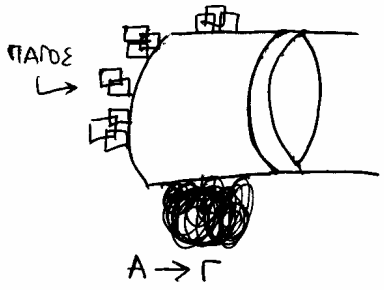
Η διαδρομή ΑΓΒ αποτελείται από μια ισόχωρη μεταβολή ΑΓ ακολουθούμενη από μια ισοβαρή μεταβολή ΓΒ.

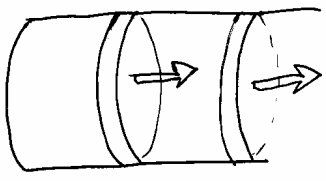
[illegible] όπως είδαμε παραπάνω

το έργο ισούται με το εμβαδόν Ε της γραμμοσκιασμένης περιοχής.

ΖΗΤΟΥΜΕ

Πως μπορούν πραγματικά να πραγματοποιηθούν αυτές οι δύο μεταβολές;

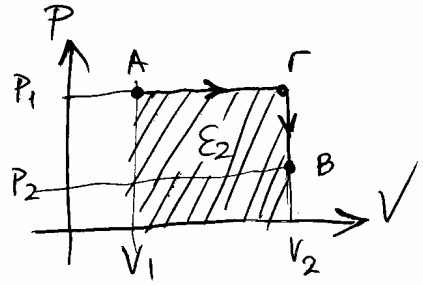




Στην Α→Γ κρατάμε το έμβολο σταθερό (ισόχωρη) ενώ παράλληλα ψύχαμε το αέριο. Η πτώση της θερμοκρασίας αποδείχθηκε και από πτώση της πίεσης (αυτό φαίνεται και από την καταστατική εξίσωση)

Στην Γ→Β αφήσαμε το έμβολο να κινηθεί αργά προς τα δεξιά εφαρμόζοντας μια μικρή απίεση. Πρακτικώς για μικρές μεταλοπώσεις δεν μεταβάλλεται αισθητά η πίεση του αερίου.

Διαδρομή 2:



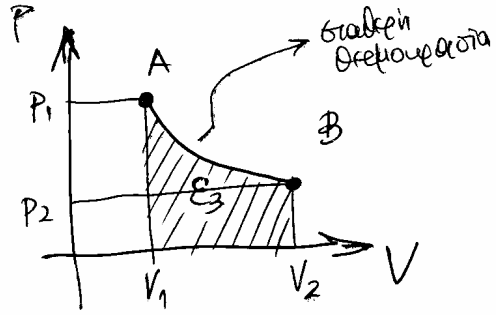
Τώρα έχουμε πρώτα την ισοβαρή ΑΓ και μετά την ισόχωρη ΓΒ.

Το έργο τώρα ισούται με το εμβαδόν E_2 το οποίο είναι προφανώς μεγαλύτερο από το E_1. Πρακτικώς αυτή η μεταβολή πραγματοποιείται αντιστρέφοντας τα 2 παραπάνω βήματα, δηλαδή πρώτα αφήσαμε το έμβολο να κινηθεί αργά προς τα δεξιά και ακολούθως ψύχαμε το αέριο με σταθερό το έμβολο.

Διαδρομή 3:

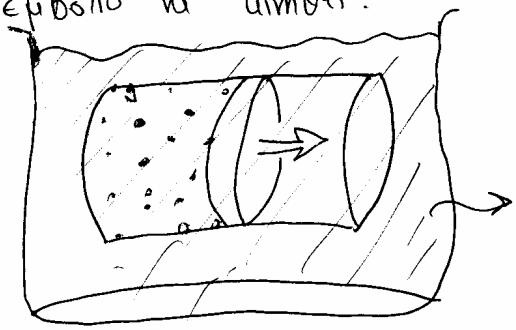
Διαλέγουμε τώρα μια ισόθερμη μεταβολή ΑΒ κατά την οποία η θερμοκρασία είναι σταθερή:

Δ. Κορζορδής



Το έργο ισούται με το εμβαδόν E_3 για το οποίο ισχύει $E_1 < E_3 < E_2$.

Πραγματικά η ισόθερμη επιτυγχάνεται εάν βυθίσουμε το έμβολο σε δεξαμενή σταθερής θερμοκρασίας (π.χ. μέσα σε δεξαμενή με μίγμα νερού-πάγου στους 0 °C) ώστε αφήνουμε επιπλέον το έμβολο να κινηθεί:



Τι σχήμα έχει η καμπύλη AB; Μπορούμε εύκολα να το απαντήσουμε αυτό εάν γνωρίζουμε την καταστατική εξίσωση. Π.χ. για ιδανικό αέριο γνωρίζουμε ότι $PV = nRT$. Εάν η θερμοκρασία T είναι σταθερή τότε nRT = σταθερά = c επομένως $PV = c \Rightarrow \boxed{P = \frac{c}{V}}$. Αυτή έχει την μορφή της εξίσωσης $y = \frac{1}{x}$

Δ. ΚΑΡΖΟΥΛΗΣ

Επομένως το έργο εξαρτάται από την διαδρομή που διαλέξαμε γιατί για 3 διαφορετικές διαδρομές βρήκαμε 3 διαφορετικές τιμές $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$.

α) Υπολογισμός του έργου για τις 3 διαδρομές:

Για την διαδρομή 1 και 2 ο υπολογισμός είναι εύκολος γιατί η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια είναι ορθογώνια οπότε εμβαδό = βάση × ύψος.

Έτσι έχουμε $\mathcal{E}_1 = (V_2 - V_1) \cdot P_2$

Ομοίως για την διαδρομή 2 $\mathcal{E}_2 = (V_2 - V_1) \cdot P_1$

Για την διαδρομή 3 πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα. Όπως είδαμε $PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V}$

και $W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,dV$ Αφού η θερμοκρασία είναι ισόθερμη το T είναι σταθερό και επομένως το nRT μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος. Έτσι

$$W = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$ ✓.

ο) ΠΡΩΤΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ (9)

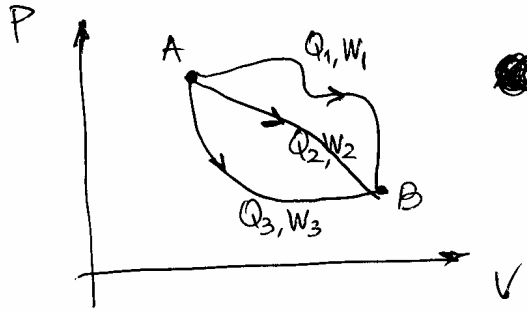
Όπως ειδαμε
Ένα θερμοδυναμικό σύστημα μπορεί να ανταλλάξει ενέργεια με τον περιβάλλοντα χώρο. Εαν αυτή η ανταλλαγή δεν συνοδεύεται από παραγωγή έργου τότε η ενέργεια αυτή ειναι η θερμότητα. Π.χ. όταν ζεσταίναμε ένα ηλεκτρικό δοχείο νερού: Προφανώς δεν παράγεται έργο επομένως η φλόγα προσφέρει στο νερό μια ποσότητα ενέργειας Q που ειναι η θερμότητα.

Εν γένει ένα σύστημα απορροφάει (ή ελκύει) θερμότητα και παράγει έργο (θετικό ή αρνητικό). Π.χ: Δοχείο με θερμαινόμενο αέριο.

Το αέριο απορροφάει ένα ποσό θερμότητας Q από την φλόγα αλλά παράλληλα εκτονώνεται ανυψώνοντας το έμβολο ⇒ παράγει έργο.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Όπως είδαμε το W εξαρτάται από την διαδρομή την οποία ακολουθούμε. Ομοίως και το Q εξαρτάται από την διαδρομή. Όμως αποδείξαμε πειραματικά ότι η ποσότητα Q-W είναι ανεξάρτητη της διαδρομής την οποία ακολουθούμε, εξαρτάται δηλαδή μόνο από την αρχική και τελική κατάσταση του συστήματος:

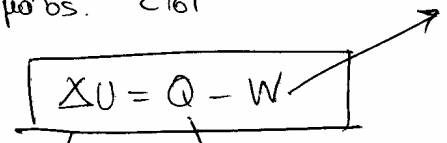


$Q_1 - W_1 = Q_2 - W_2 = Q_3 - W_3$.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Έτσουν το σύστημα ανταλλάσσει μόνο θερμότητα Q και έργο W με το περιβάλλον του (και τίποτα άλλο) και αφού τα Q και W έχουν διαστάσεις ενέργειας, τότε η ποσότητα Q-W έχει το νόημα της ενέργειας και εισέρχεται στο σύστημα (με την μορφή θερμότητας) μέσω την ενέργεια και προσφέρει το σύστημα (με την μορφή μηχανικού έργου). Επομένως το Q-W πρέπει να είναι το ποσό της ενέργειας και αποθηκεύτηκε στο σύστημα κατά τη διάρκεια μιας μεταβολής, δηλαδή η εσωτερική ενέργεια ΔU του

συστήματος. Έτσι

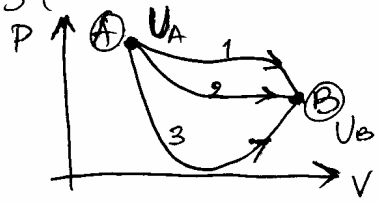


1ος ΝΟΜΟΣ της ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ.

εσωτερική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα κατά την διάρκεια της μεταβολής.	θερμότητα που προσφέρεται στο σύστημα

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Γράφουμε ΔU και όχι U για να τονίσουμε το γεγονός ότι η εσωτερική ενέργεια εξαρτάται από την αρχική και τελική κατάσταση μόνο και ως τέτοια εξαρτάται μόνο από διαφορές (όπως π.χ. η διαφορά του πλευρικού δυναμικού ή η διαφορά δυναμικής ενέργειας στο βαρυτικό πεδίο της γης). Έτσι π.χ. μπορούμε να θυμήσουμε ότι στο σημείο Α η εσωτερική ενέργεια είναι U_A και στο Β αντίστοιχα είναι U_B και κατά την μεταβολή Α→Β η εσωτερική ενέργεια μεταβάλλεται κατά $\Delta U = U_B - U_A$ ανεξάρτητα της διαδρομής:



$\Delta U = U_B - U_A = Q_1 - W_1 = Q_2 - W_2 = Q_3 - W_3$