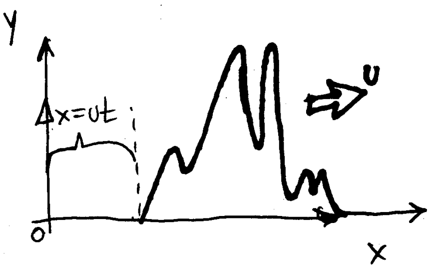
Δ. Κουζούδης

ΚΕΦ 19. ΚΥΜΑΤΑ

<u>Κύμα</u>: Μια διαταραχή που μεταφέρεται στο χώρο με σταθερή ταχύτητα

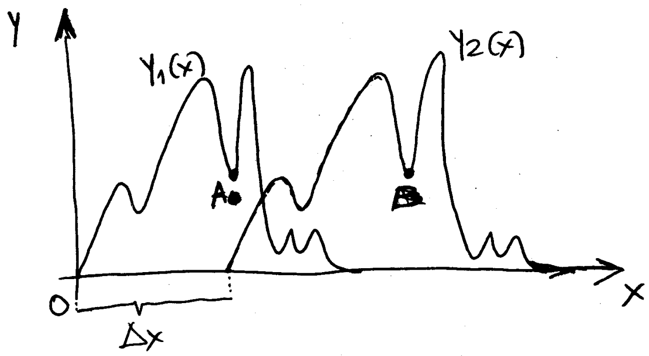
π.χ.:

$t=0$



$t>0$

Τι κοινό έχουν δύο <u>ίδιες</u> γραφικές παραστάσεις που είναι μετατοπισμένες κατά Δx; Εάν τις βάλουμε μαζί στο ίδιο διάγραμμα



Και ονομάσουμε $y_1(x)$ την γρ. παράσταση της πρώτης και $y_2(x)$ την γρ. παράσταση της δεύτερης τότε ποια είναι η σχέση της $y_2(x)$ με την $y_1(x)$;

Έστω το σημείο Α στην πρώτη γρ. παράσταση και Β το αντίστοιχο σημείο στην δεύτερη. Αφού οι δυο γρ. παραστάσεις είναι μετατοπισμένες κατά Δx τότε $x_B = x_A + \Delta x$. Εφόσον πρόκειται για το ίδιο σχήμα μετατοπισμένο προς τα δεξιά, το ύψος δεν αλλάζει και έτσι $y_B = y_A$. Γράφοντας τα παραπάνω με την μορφή συναρτήσεων έχουμε

$$y_2(x_B) = y_1(x_A)$$

Δ. Κουζούδης

Ομοίως και για τα άλλα σημεία οπότε

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x-\Delta x)}$$

Για την περίπτωση κύματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα τότε $\Delta x = \upsilon t$ οπότε

$$y_2(x) = y_1(x-\upsilon t)$$

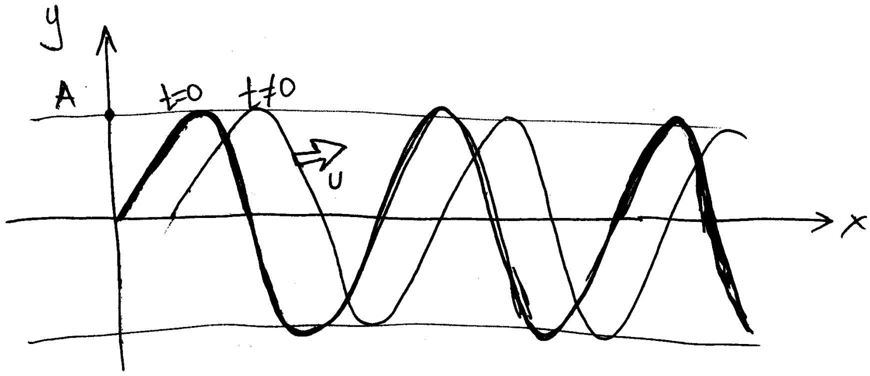
Αυτή είναι η πιο γενική έκφραση ενός κύματος που κινείται προς τα δεξιά. Συνήθως γράφουμε

$y = f(x-\upsilon t)$	ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ με ταχύτητα υ προς τα δεξιά

Ομοίως η $y=f(x+ut)$ εκφράζει ένα κύμα που κινείται προς τα αριστερά.

α) Περιοδικά κύματα.

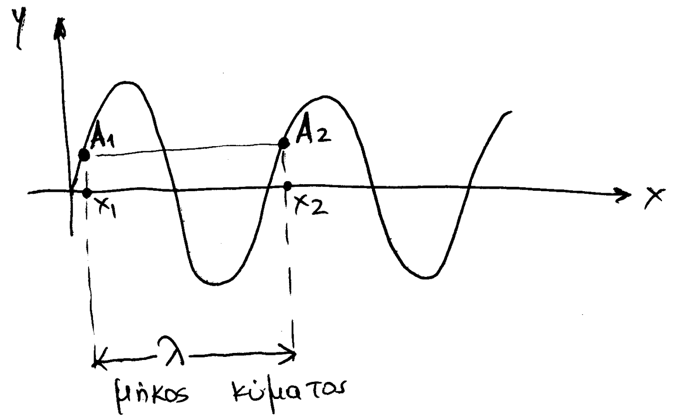
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα κύματα που εμφανίζουν κάποια περιοδικότητα ως προς τον χώρο. Η πιο απλή περίπτωση είναι η συνάρτηση του ημιτόνου $y = A\,ημ\,kx$ που όπως είδαμε μπορεί να γίνει κύμα εάν την γράψουμε με την μορφή $y = A\,ημ\,k(x-ut)$:



Δ. Καζούδης

β) Φυσική ερμηνεία των σταθερών.

Για $t=0$ έχουμε $y = A\,ημ\,kx$. Η γνωστή μας συνάρτηση ημιτόνου εμφανίζει περιοδικότητα. Η απόσταση ενός πλήρους κύκλου (στο χώρο) ονομάζεται <u>μήκος</u>



<u>κύματος</u> και συμβολίζεται με λ. Έστω τα σημεία A_1 και A_2 που απέχουν κατά λ. Έστω $\varphi_1 = kx_1$ και $\varphi_2 = kx_2$. Οι φ_1 & φ_2 είναι τα ορίσματα του ημιτόνου άρα έχουν την έννοια της γωνίας. Αφού απέχουν κατά 1 κύκλο τότε $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \Rightarrow$

$$kx_2 - kx_1 = 2\pi \Rightarrow k\cdot\lambda = 2\pi \Rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

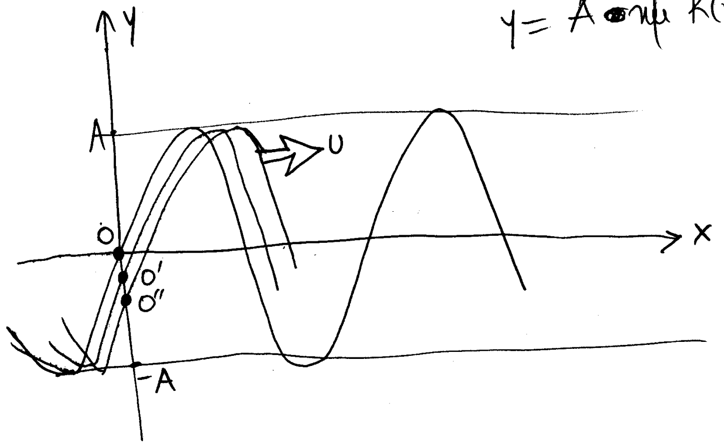
Άρα η σταθερά k ισούται με 2π δια το μήκος κύματος και είναι γνωστή & ως <u>κυματάριθμος</u>.

<u>Σημείωση</u>: Όπως το κύμα κινείται προς τα δεξιά, οι σχετικές αποστάσεις του σχήματος του ημιτόνου δεν αλλάζουν επομένως τόσο το λ όσο και το k είναι σταθερές του κύματος.

Δ. Κουτσίδης

σ) Περιοδικότητα ως προς χρόνο.

$y = A\,\eta\mu\, k(x - \upsilon t)$



Δ. Κωτσίδης

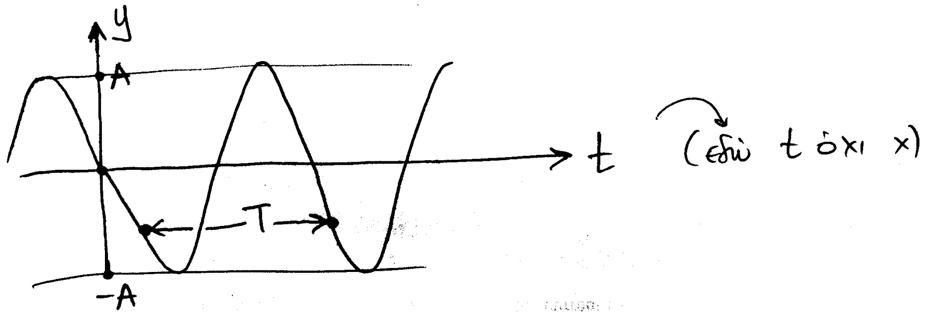
Εαν ένας παρατηρητής βρίσκεται σε ένα σταθερό σημείο, π.χ. στο $x=0$, τότε όπως περνάει το κύμα προς τα δεξιά, βλέπει το ύψος y του κύματος να μεταβάλλεται όπως π.χ. τα σημεία $O \to O' \to O''$. Εαν χρησιμοποιήσουμε λίγο την φαντασία μας θα δούμε ότι το σημείο O εκτελεί ταλάντωση από το A έως το $-A$ (όταν περνάει ένα μέγιστο του κύματος από το $x=0$ τότε το σημείο O είναι στο πλάτος A ενώ όταν περνάει ένα ελάχιστο τότε το O είναι στο $-A$). Αυτό φαίνεται μαθηματικώς και από την εξίσωση του κύματος $y = A\,\eta\mu\, k(x - \upsilon t)$ εάν θέσουμε $x=0 \Rightarrow$

$y = A\,\eta\mu(-k\upsilon t)$

που ως γνωστόν περιγράφει ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\boxed{\omega = k\upsilon}$. οπότε

$y = A\,\eta\mu(-\omega t) = -A\,\eta\mu\,\omega t$

Σε άξονες $y-t$ η γραφική παράσταση αυτού είναι:

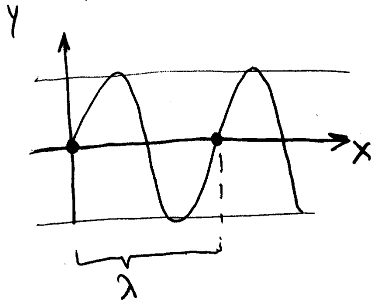


Δ. Καζούδης

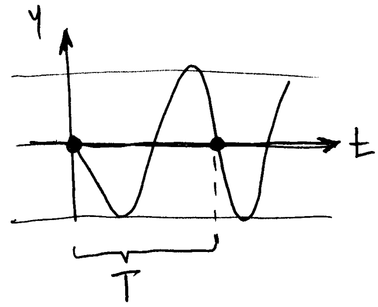
Παρομοίως όπως και με τον χώρο x, έτσι και στον χρόνο t ορίζεται η περίοδος T ως ο χρόνος που χρειάζεται για να πραγματοποιηθεί ένας πλήρης κύκλος. Δουλεύοντας όπως παραπάνω μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\omega = \frac{2\pi}{T}$

σ) <u>Συνοψίζοντας</u>: $\boxed{y = A\eta\mu(kx - \omega t)}$

ΧΩΡΟΣ



ΧΡΟΝΟΣ



$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ → μήκος κύματος

κυματάριθμος

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ → περίοδος

κυκλική συχνότητα

Τα ω και k σχετίζονται $\boxed{\omega = \upsilon k}$.

Σημείωση. Μια άλλη χρήσιμη ποσότητα είναι η <u>συχνότητα</u> η οποία εκφράζει τον αριθμό των κύκλων στην μονάδα του χρόνου. Αφού στον χρόνο μιας περιόδου T έχει ολοκληρωθεί ένας πλήρης κύκλος τότε $\boxed{f = \frac{1}{T}}$. Η σχέση

$\omega = \upsilon k$ επίσης γράφεται και ως $\frac{2\pi}{T} = \upsilon \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow$

$\upsilon = \frac{\lambda}{T}$ ή και $\boxed{\upsilon = \lambda f}$.

Δ. Κατζώδης

ο) Πρόβλημα 19-3

8

περιοχή συχνοτήτων $f_1 = 20\ Hz$ έως $20\ kHz$

πόσο το μήκος κύματος

α) για ~~η~~ ηχητικό κύμα στον αέρα $υ = 344\ m/s$

β) για ηχητικό κύμα στο νερό $υ = 1480\ m/s$;

<u>Λύση:</u>

Έχουμε $υ = λ f \Rightarrow λ = \frac{υ}{f}$

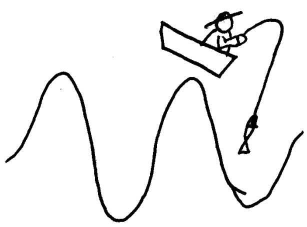
α) $υ = 344\ m/s$ $\quad λ_1 = \frac{υ}{f_1} = \frac{344\ m/\cancel{s}}{20\ 1/\cancel{s}} = 17{,}2\ m$

$λ_2 = \frac{υ}{f_2} = \frac{344\ m/\cancel{s}}{20000\ 1/\cancel{s}} = 17{,}2\ mm$

β) $υ' = 1480$ $\quad λ_1 = \frac{υ'}{f_1} = \frac{1480\ m/s}{20\ 1/s} = 74\ m$ $\quad λ_2 = 74\ mm$

Δ. Κρότσος

ο) Πρόβλημα 19-5



ανώτερο - κατώτερο $Δt = 3s$

απόσταση $Δy = 0{,}8\ m$

Κορυφές απέχουν $Δx = 8\ m$

α) Ταχύτητα b) πλάτος κύματος

<u>Λύση:</u> α) Μια πλήρη περίοδος είναι ο χρόνος που απαιτείται από ανώτερο → κατώτερο → ανώτερο σημείο άρα το 3s είναι ο χρόνος μισής περιόδου ⇒ $T = 6s$

Αφού οι κορυφές απέχουν 8m τότε αυτό είναι (9)
και το μήκος κύματος $\lambda = 8m$.

Επομένως $\upsilon = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{8m}{6s} = 1{,}33\ m/s$

β) Στη συνάρτηση κυμάτων $y = A(kx - \omega t)$ το y διαγράφει απόσταση $\Delta y = 2A$ από το μέγιστο A έως το ελάχιστο $-A$. Από τα δεδομένα αυτό είναι $0{,}8\ m$ άρα $2A = 0{,}8m \Rightarrow A = 0{,}4\ m$.

Δ. Κουτσούδης

ο) Πρόβλημα 19-7

Ταχύτητα $\upsilon = 15\ m/s$ πλάτος $A = 0{,}08\ m$ μήκος κύματος $\lambda = 0{,}3\ m$. Ταξιδεύουν προς $+x$

α) βρείτε f, T, k β) γράψτε την συνάρτηση που περιγράφει το κύμα c) πόσο y στο $x = 0{,}2\ m$ όταν $t = 0{,}2\ s$;

Λύση

α) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \times 3.14}{0{,}3\ m} = 20{,}9\ m^{-1}$

$\upsilon = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{\upsilon} = \frac{0{,}3\ m}{15\ m/s} = 0{,}02\ s$

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}02 s} = 50\ s^{-1} = 50\ Hz$

β) $y = A\,\eta\mu(kx - \omega t) = A\,\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{\lambda}t\right)$

Βάζοντας νούμερα:

$$\boxed{y = 0{,}08\,\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{x(m)}{0{,}3} - \frac{t(s)}{0{,}02}\right)\right]\ m}$$

γ) Θέτοντας $x = 0{,}2\ m$ και $t = 0{,}2\ s$ έχουμε

$$y = 0{,}08\,\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{0{,}2}{0{,}3} - \frac{0{,}2}{0{,}02}\right)\right] = -0{,}068\ m.$$

Δ. Κουτσίδης