...ρο η ελάχιστη ένταση που μπορεί να ανιχνεύσει το ανθρώπινο αυτί).

Παρακάτω δίνουμε μερικές χαρακτηριστικές εντάσεις τόσο σε W/m^2 όσο και σε (dB):

Πηγή	Ένταση I W/m^2	$\frac{I}{I_0}$	$\log\frac{I}{I_0}$	$\beta = 10 \log\frac{I}{I_0}$ dB
Αεριωθούμενο	10^3	10^{15}	15	150
Κομπρεσέρ	10^1	10^{13}	13	130
Σειρήνα	10^0	10^{12}	12	120
Υπόγειος σιδηρόδρομος	10^{-2}	10^{10}	10	100
Κυκλοφοριακή κίνηση	10^{-4}	10^8	8	80
Ηλεκ. σκούπα	10^{-5}	10^7	7	70
Συζήτηση	10^{-7}	10^5	5	50
Βόμβος κουνουπιού	10^{-8}	10^4	4	40
Ψίθυρος	10^{-9}	10^3	3	30
Θρόισμα φύλλων	10^{-11}	10^1	1	10
Κατώφλι ακοής	10^{-12}	10^0	0	0

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Θ) Τριγωνομετρία

Στα επόμενα θα μας χρειαστεί η τριγωνομετρική σχέση:

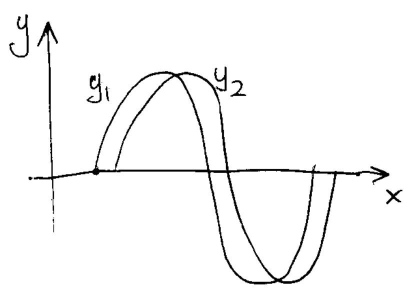
$$\sin A + \sin B = 2 \cos\frac{A-B}{2} \sin\frac{A+B}{2} \qquad \boxed{1}$$

θ) Επαλληλία αρμονικών κυμάτων

Όπως είδαμε παραπάνω όταν έχουμε δύο κύματα y_1 και y_2 τότε η επαλληλία τους δίνεται από την $y = y_1 + y_2$. Υπάρχουν οι εξής τρεις ιδιαίτερες περιπτώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΣ	ΟΝΟΜΑΣΙΑ
y_1 και y_2 διαφέρουν μόνο κατά μια σταθερή φάση φ	$y_1 = y_0 \sin(kx - \omega t)$ $y_2 = y_0 \sin(kx - \omega t - \varphi)$	ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ
y_1 και y_2 διαφέρουν μόνο κατά κατεύθυνση	$y_1 = y_0 \sin(kx - \omega t)$ $y_2 = y_0 \sin(kx + \omega t)$	ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ
y_1 και y_2 διαφέρουν πολύ ελάχιστα κατά συχνότητα	$y_1 = y_0 \sin(kx - \omega_1 t)$ $y_2 = y_0 \sin(kx - \omega_2 t)$ όπου $\omega_1 \simeq \omega_2$	ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

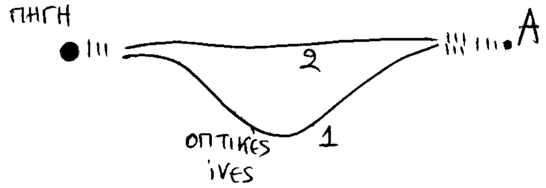
θ) Συμβολή κυμάτων



Τα δύο κύματα διαφέρουν μόνο κατά μια σταθερή φάση. Αυτό π.χ. γίνεται όταν δύο ίδια κύματα ξεκινούν από την ίδια πηγή αλλά ακολουθούν δύο διαφορετικές διαδρομές, π.χ. δύο φωτεινά

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

σήματα μέσα από δύο διαφορετικές οπτικές ίνες καταλήγουν στο ίδιο σημείο Α. Σε γένει θα φτάσουν με διαφορετική φάση (13)



Έτσι εάν

$$y_1 = y_0 \sin(kx-\omega t)$$

τότε

$$y_2 = y_0 \sin(kx-\omega t+\varphi)$$

Σύμφωνα με την τριγωνομετρική σχέση $\boxed{1}$ με

$A = kx-\omega t$ και $B = kx-\omega t+\varphi$

$$\frac{A-B}{2} = \frac{-\varphi}{2} \qquad \frac{A+B}{2} = kx-\omega t+\frac{\varphi}{2}$$ και έτσι

$$y = y_1+y_2 = 2y_0 \cos\left(\frac{-\varphi}{2}\right) \sin\left(kx-\omega t+\frac{\varphi}{2}\right)$$

Δηλαδή $\boxed{y = \tilde{y}_0 \sin\left(kx-\omega t+\frac{\varphi}{2}\right)}$ όπου το νέο πλάτος δίνεται από την σχέση $\tilde{y}_0 = \underbrace{2y_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}_{\text{σταθερό}}$

Επομένως το συνισταμένο κύμα είναι και αυτό αρμονικό με τα ίδια k, ω όπως και τα y_1 και y_2 και με την μισή διαφορά φάσης από ότι διαφέρουν τα y_1 και y_2.

Το ενδιαφέρον στο y είναι το πλάτος του $\tilde{y}_0$ το οποίο εξαρτάται από την φ. Έτσι για

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

διαφορετικές τιμές του φ έχουμε

φ	$\tilde{y}_0$	α	Συμβολή
0	$2y_0$	Μέγιστο πλάτος	Ενισχυτική
π	0	Μηδενικό πλάτος	Καταστροφική

Έτσι π.χ. μεταβάλλοντας το μήκος μιας εκ των δύο πηγών μπορούμε να πετύχουμε μεγιστοποίηση ή μηδενισμό του σήματος y.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

θ) Διακρότημα

$$y_1 = y_0 \sin(kx - \omega_1 t) \qquad \text{όπου} \quad \omega_1 \simeq \omega_2$$

$$y_2 = y_0 \sin(kx - \omega_2 t)$$

Σύμφωνα με την τριγωνομ. σχέση $\boxed{1}$ έχουμε

$$y = y_1 + y_2 = 2\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \, \sin\left(kx - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Με $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ (μέσος όρος) και $\omega_\delta = \omega_2 - \omega_1$

έχουμε
$$y = 2\cos\left(\frac{\omega_\delta}{2} t\right) \sin(kx - \omega t)$$

Αφού $\omega_1 \simeq \omega_2$ π.χ. $\omega_1 = 100.1 \ \frac{rad}{s}$

και $\omega_2 = 100.3 \ \frac{rad}{s}$ τότε

και $\omega \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$ $\quad \omega = 100.2 \ \frac{rad}{s}$

Δηλαδή και το συνισταμένο κύμα $y = y_1 + y_2$ ταλαντεύεται με την ίδια περίπου συχνότητα ω όπως και τα y_1 και y_2. Το ω_s όμως είναι πολύ μικρό π.χ. στο παρακάτω παράδειγμα

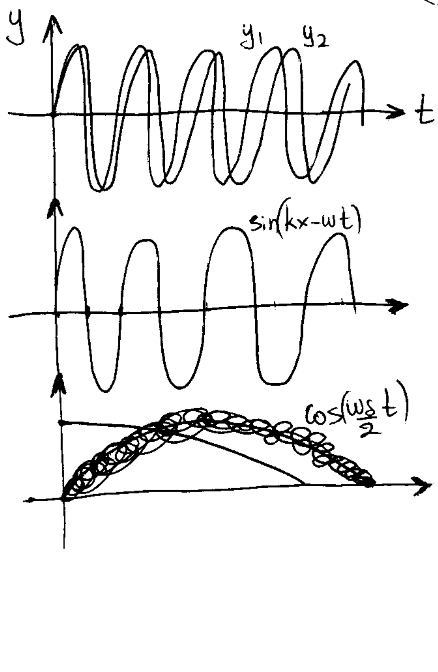
$$\omega_s = \omega_2 - \omega_1 = 100.3 - 100.1 \ \frac{rad}{s} = 0,2 \ \frac{rad}{s} \ll \omega$$

Γράφοντας $\tilde{y}_0 = 2\cos\left(\frac{\omega_s}{2} t\right)$ έχουμε

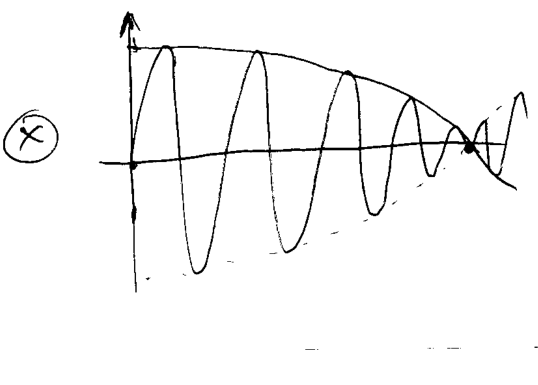
$$y = \tilde{y}_0 \sin(kx - \omega t)$$

Δηλαδή έχουμε ένα "σχεδόν" αρμονικό κύμα αλλά με πλάτος $\tilde{y}_0$ που εξαρτάται από τον χρόνο t. Όμως επειδή το ω_s είναι πολύ μικρό, το πλάτος αυτό μεταβάλλεται πολύ αργά. Ο συνδυασμός των δύο παραγόντων της y δίνει:

Δ. ΚΟΤΖΟΓΛΙΔΗΣ



(Για σταθερό x, π.χ. $x=0$)



Λόγω του όρου $\cos(\frac{\omega_\delta}{2}t)$ το σήμα μηδενίζεται

όταν $\frac{\omega_\delta}{2}t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$ κ.τ.λ.

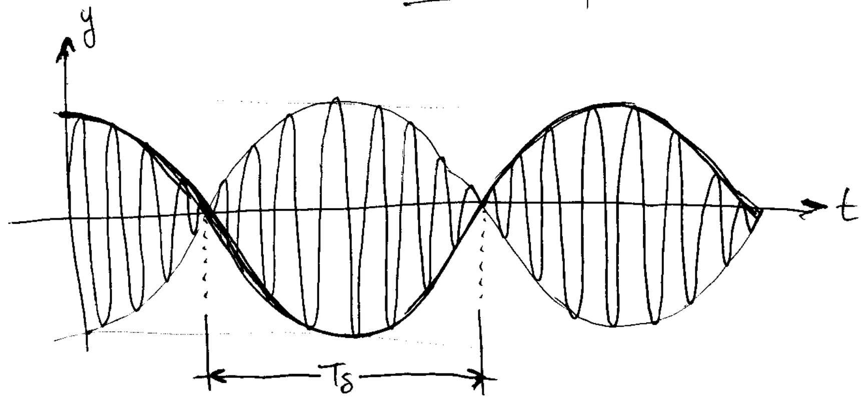
ή όταν $\omega_\delta t = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots$

δηλαδή κάθε $\omega_\delta \Delta t = 2\pi \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{\omega_\delta} = T_\delta$

περίοδος διακροτήματος

$$\boxed{T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}}$$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ



Διακροτήματα εμφανίζονται πολύ συχνά κατά το "κούρδισμα" μουσικών οργάνων όταν η συχνότητά τους πλησιάζει την συχνότητα αναφοράς (του διαπασών). Τότε η ένταση του ήχου αυξομειώνεται όπως περιγράφει η παραπάνω γραφική παράσταση.

6) Στάσιμα κύματα

Στάσιμο κύμα έχουμε όταν τα y_1 και y_2 είναι ίσα αλλά με αντίθετη κατεύθυνση:

$$y_1 = y_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$y_2 = y_0 \sin(kx + \omega t)$$

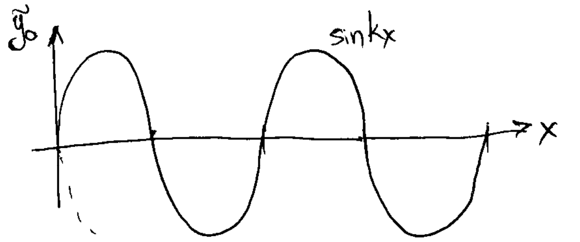
Σύμφωνα με την τριγωνομ. σχέση $\boxed{1}$ έχουμε

$$y = y_1 + y_2 = 2y_0 \cos\omega t \sin kx$$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Επομένως το συνισταμένο κύμα δεν έχει την μορφή απλού αρμονικού κύματος. Θέτοντας $\tilde{y}_0 = 2y_0 \sin kx$ τότε $y = \tilde{y}_0 \cos\omega t$

η οποία έχει την μορφή αρμονικού ταλαντωτή αλλά με πλάτος $\tilde{y}_0 = 2y_0 \sin kx$ το οποίο εξαρτάται από την απόσταση x. Μια γραφική παράσταση δείχνει ότι το πλάτος $\tilde{y}_0$ μηδενίζεται όταν

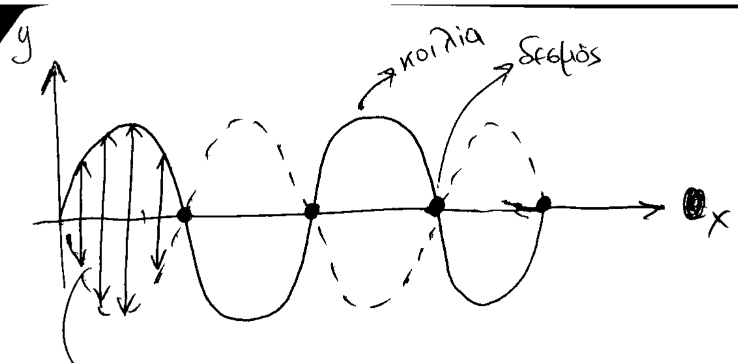


$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$

δηλαδή

$kx = n \cdot \pi \quad n = 0, 1, 2 \ldots$

Το y λοιπόν έχει την μορφή ~~αρμονικού~~ αρμονικών ταλαντωτών σε κάθε σημείο x με ίδια κυκλική συχνότητα ω αλλά με διαφορετικό πλάτος $\tilde{y}_0(x)$ σε κάθε σημείο:



ταλαντωτές $\quad y = \tilde{y}_0(x)\cos(\omega t)$.

Στα σημεία $kx = n\pi$ έχουμε πάντα $y=0$ και ονομάζονται δεσμοί. Στη μέση ακριβώς μεταξύ δύο δεσμών έχουμε σημεία με μέγιστο πλάτος $\tilde{y}_0 = 2y_0$ που ονομάζονται κοιλίες.

Δ. ΚΟΤΖΟΥΔΗΣ

Εκφράζοντας το k ως $\frac{2\pi}{\lambda}$ μπορούμε να βρούμε τις θέσεις των δεσμών συναρτήσει του μήκους κύματος.

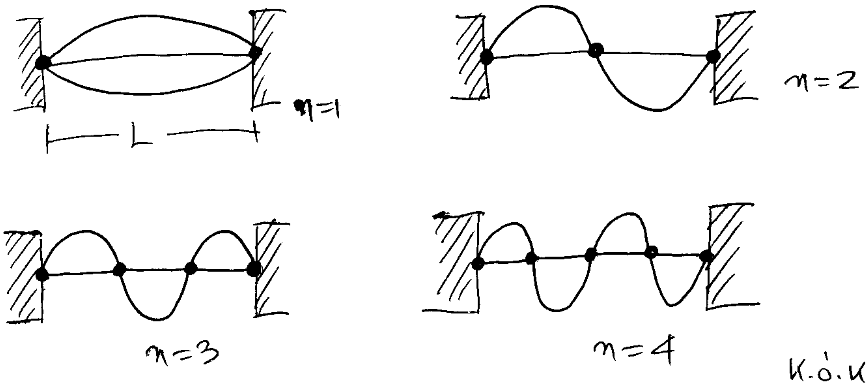
$$kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$$

Άρα $\quad \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \pi \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{2}}$

έχουμε δεσμούς κάθε $\lambda/2$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που τα y_1 και y_2 είναι μέρος του ίδιου κύματος που απλά ανακλάται πάνω σε δύο σταθερά σημεία, π.χ. δύο τοίχους:

Τότε στα σταθερά σημεία πρέπει αναγκαστικά να έχουμε δεσμό λόγω ανάκλασης. Εάν L είναι η απόσταση των δύο σταθερών σημείων τότε έχουμε τους εξής μερικούς πιθανούς συνδυασμούς:



κ.ό.κ.

όπου το n αριθμεί τον αριθμό των κοιλιών. Όπως είδαμε παραπάνω η απόσταση μεταξύ δύο δεσμών είναι $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$ οπότε στις παραπάνω 4 περιπτώσεις έχουμε:

n	$\Delta x = \lambda/2$	λ
1	L	$2L$
2	$L/2$	L
3	$L/3$	$2L/3$
4	$L/4$	$L/2$
⋮	⋮	⋮

Γενικεύοντας λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Δ. ΚΟΓΖΟΓΛΗΣ

Εάν θυμηθούμε ότι για κύματα ισχύει

$f = \frac{\upsilon}{\lambda}$ και ότι για το νήμα έχουμε $\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

τότε οι αντίστοιχες συχνότητες είναι

$$f_n = \frac{\upsilon}{\lambda_n} \Rightarrow \boxed{f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}.}$$

συχνότητες στάσιμου κύματος με σταθερά τα δύο άκρα.

Αυτές οι συχνότητες είναι γνωστές και ως αρμονικές.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ