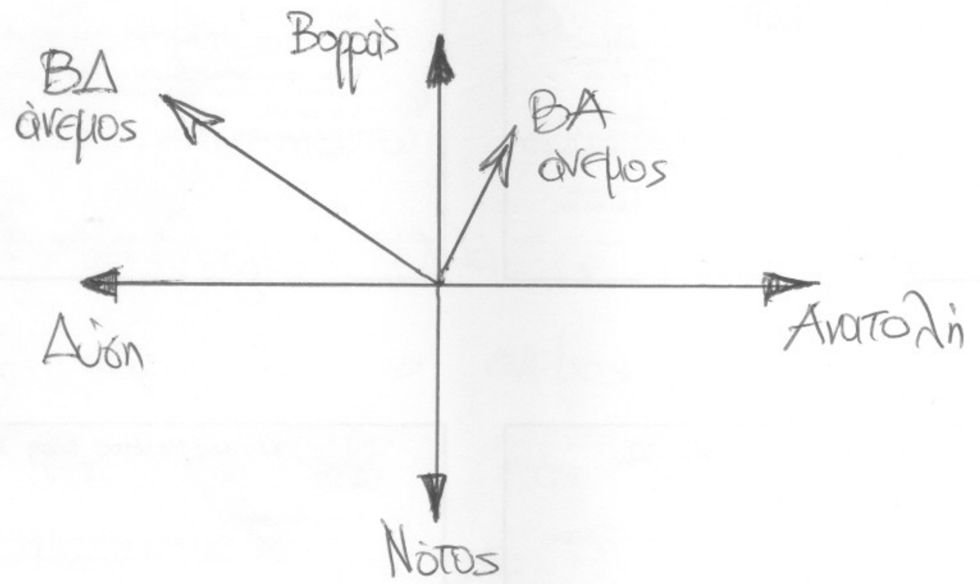
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

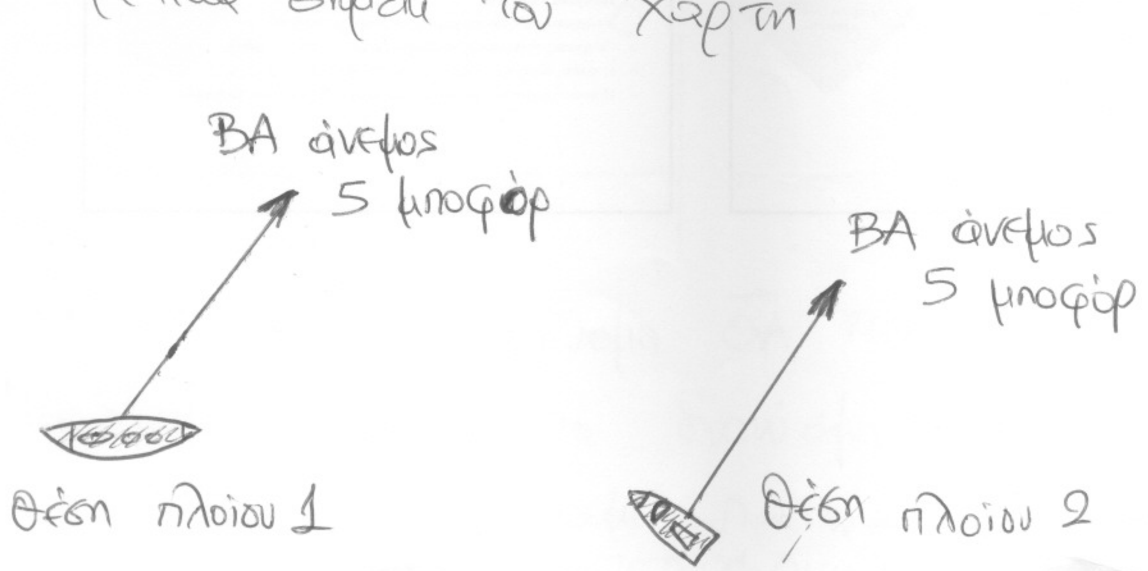
Το διάνυσμα είναι μια μαθηματική οντότητα που περιγράφει μια κατεύθυνση στον χώρο. Απεικονίζεται με ένα βέλος. Παράδειγμα οι δύο



άνεμοι στο παραπάνω σχήμα. Ο ένας είναι βορειο-δυτικός (ΒΔ) και ο άλλος βορειο-ανατολικός (ΒΑ). Τα βέλη μας βοηθούνε να βρούμε εύκολα την κατεύθυνσή τους. Επίσης καταλαβαίνουμε από τα μήκη των βελών ότι ο ΒΔ άνεμος είναι ισχυρότερος στο συγκεκριμένο παράδειγμα από ότι ο ΒΑ άνεμος.

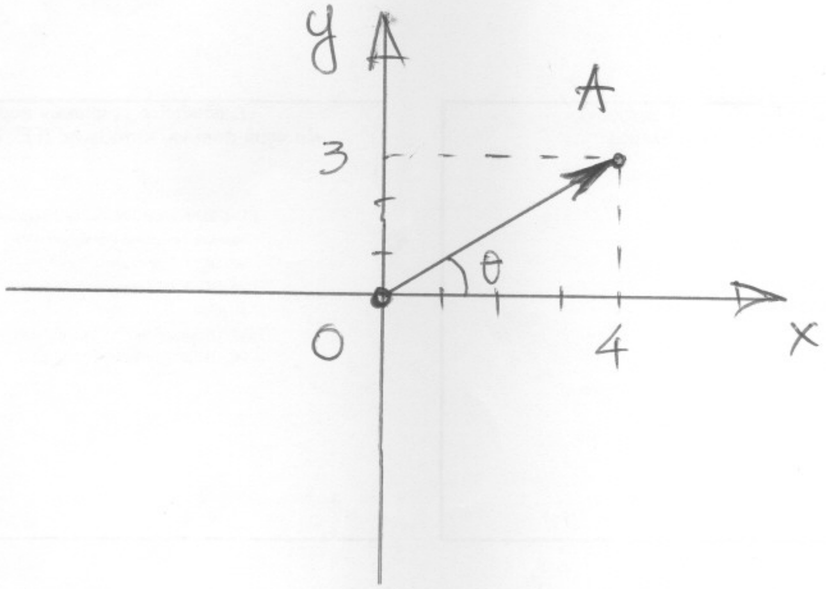
Άρα τα διανύσματα στις δύο διαστάσεις, εμπεριέχουν δύο κομμάτια πληροφορίας: α) την κατεύθυνση που δείχνει το βέλος (την φορά) και β) την ένταση του μεγέθους που περιέχουν (π.χ. η ταχύτητα του ανέμου) που εκφράζεται από το μήκος του βέλους.

Συνήθως στα διανύσματα, η απόλυτη θέση τους δεν έχει σημασία στην Φυσική. Π.χ. για τα δύο πλοία του παρακάτω σχήματος που βρίσκονται στο ίδιο πέλαγος αλλά σε κάποια σχετική απόσταση μεταξύ τους. Εαν ο άνεμος είναι λίγο-πολύ ο ίδιος και για ~~τους~~ τα δύο πλοία, τότε οι δύο καπετάνιοι θα σχεδίαζαν το ίδιο βέλος σε δύο διαφορετικά σημεία του χάρτη



Κοιτώντας τα δύο διανύσματα μπορούμε να πούμε ότι έχουν την ίδια φορά και το ίδιο μήκος άρα κατά μια γενική έννοια είναι "ίσα", δηλαδή περιγράφουν τον ίδιο άνεμο. Έτσι λοιπόν λέμε ότι τα διανύσματα στην Φυσική (τα περισσότερα) είναι "ολισθαίνοντα" δηλαδή μπορούμε ελεύθερα να τα μετατοπίζουμε αρκεί να διατηρούμε το μήκος τους και την φορά τους.

Για να περιγράψουμε μια ομάδα τέτοιων "ίσων" ολισθαινόντων διανυσμάτων, διαλέγουμε ένα χαρακτηριστικό αντιπρόσωπό τους, αυτόν που η αρχή του διανύσματος βρίσκεται στην αρχή των αξόνων:



Έτσι π.χ. το διάνυσμα $\vec{OA}$ περιγράφει όλα τα ισοδύναμα ολισθαίνοντα διανύσματα σε αυτό. Στον συμβολισμό του γράφουμε πρώτα την αρχή του βέλους (εδώ η αρχή των συντεταγμένων) O, ακολουθεί το σημείο A που είναι το τέλος (το πέρας) του βέλους, και στην συνέχεια βάζουμε ένα μικρό βέλος πάνω από τα δυο γράμματα: $\vec{OA}$ (έτσι ξεχωρίζουμε ένα διάνυσμα από το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα OA).

Τα x και y δεν είναι αδιάστατα όπως στα μαθηματικά αλλά έχουν τις μονάδες του μεγέθους που αναπαριστάνει το διάνυσμα. Π.χ. στην περίπτωση του ανέμου, τα x και y μπορεί να είναι σε m/s ή για τους ναυτικούς σε μποφόρ.

Μέχρι τώρα μιλήσαμε ποιοτικώς για τα διανύσματα. Για να μπορούμε να συγκρίνουμε με ακρίβεια δυο ή περισσότερα διανύσματα, πρέπει να τα ποσοτικοποιήσουμε, δηλαδή να τους δώσουμε νούμερα. Όπως είπαμε, στις δυο διαστάσεις, τα διανύσματα εμπεριέχουν δυο κομμάτια πληροφορίας. Επομένως πρέπει να τους αποδώσουμε δυο αριθμούς. Έτσι το διάνυσμα $\vec{OA}$ του παραπάνω σχήματος προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο εάν μας δώσουν την γωνία του $\theta = 36,9^\circ$ (κατεύθυνση) και το μέτρο του (το μήκος του) το οποίο συμβολίζεται με $|\vec{OA}|$. Από απλό Πυθαγόρειο Θεώρημα (5) έχουμε ότι $|\vec{OA}| = 5$. Προσοχή όμως, το $|\vec{OA}|$ έχει τις ίδιες μονάδες με τα x και y και έτσι εάν αυτά είναι π.χ. σε m/s τότε πιο σωστά πρέπει να γράψαμε $|\vec{OA}| = 5$ m/s. Άρα το διάνυσμά μας $\vec{OA}$ είναι στην ουσία ένα σύνολο δύο αριθμών: $\theta = 36{,}9°$ και $|\vec{OA}| = 5$ m/s.

Εναλλακτικά, οι φυσικοί περιγράφουν τα διανύσματα χρησιμοποιώντας δύο άλλους αριθμούς που είναι απλά οι συντεταγμένες του σημείου A $x_A = 4\ \frac{m}{s}$ και $y_B = 3\ \frac{m}{s}$. Εφόσον η αρχή του διανύσματος είναι κατά σύμβαση πάντα η αρχή των αξόνων O (εκτός και εάν αναφερθεί αλλιώς) τότε αρκεί να δώσουν οι συντεταγμένες του άλλου σημείου A για να προσδιορισθεί πλήρως το διάνυσμα. Επίσης οι φυσικοί γράφουν αυτά τα δύο νούμερα μαζί χρησιμοποιώντας παρενθέσεις και ένα κόμμα, ακριβώς όπως κάνουν και με τις συντεταγμένες του A. Δηλαδή το (4,3) μπορεί να αναπαριστάνει είτε το διάνυσμα $\vec{OA}$ είτε το σημείο A. Συνήθως επειδή το σημείο και το διάνυσμα είναι αρκετά διαφορετικές ιδιότητες, δεν επέρχεται σύγχυση. Έτσι π.χ. γράφουμε $\vec{OA} = (4,3)$.

Εάν μας δώσουν τις συντεταγμένες x και y ενός διανύσματος όπως του $\vec{OA}$ παραπάνω, τότε εύκολα μπορούμε να μεταβούμε στην εναλλακτική περιγραφή του $\vec{OA}$ που είναι με βάση την γωνία και το μέτρο του. Από ένα απλό Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε όπως είδαμε $|\vec{OA}| = \sqrt{x^2+y^2}$. Επίσης από απλή τριγωνομετρία έχουμε $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (το "tan" είναι η εφαπτομένη. Χρησιμοποιώ τους διεθνείς συμβολισμούς γιατί απαντώνται στους υπολογιστές και τις αριθμομηχανές).

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

Στα διανύσματα ορίζονται τέσσερις διαφορετικές πράξεις μεταξύ δύο διαφορετικών διανυσμάτων $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$

α) το άθροισμα $\vec{OA} + \vec{OB}$

β) η διαφορά $\vec{OA} - \vec{OB}$

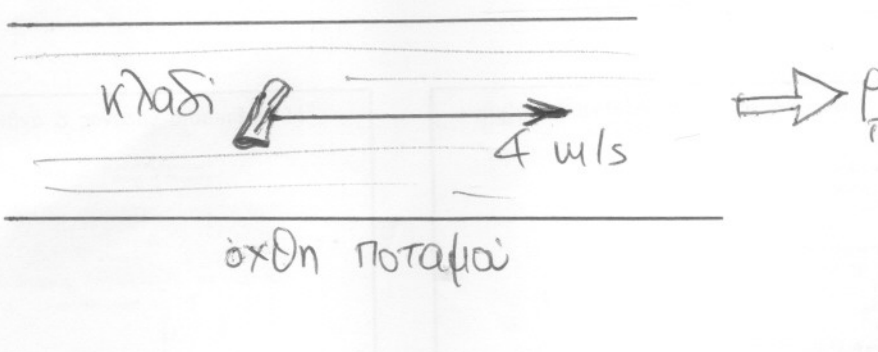
γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

δ) το εξωτερικό γινόμενο $\vec{OA} \times \vec{OB}$

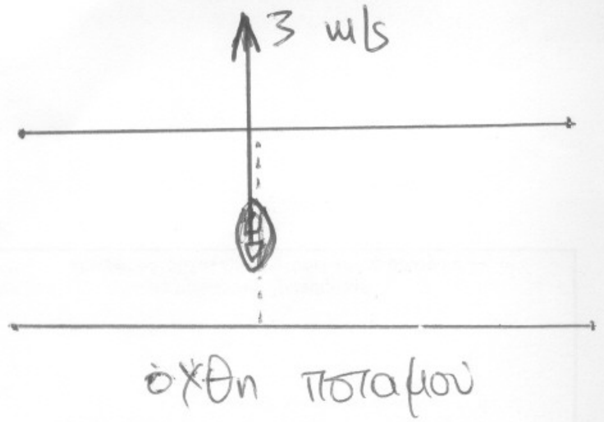
όλες οι πράξεις εκτός από το εσωτερικό γινόμενο, μας δίνουν ως αποτέλεσμα ένα νέο τρίτο διάνυσμα π.χ. $\vec{\sigma\tau}$. Αντιθέτως το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου είναι ένας απλός αριθμός.

α) Το άθροισμα δύο διανυσμάτων.

Γιατί υπάρχει η ανάγκη να προστεθούν δύο διανύσματα; Ένα απλό παράδειγμα θα μας διαφωτίσει. Έστω ένα ποτάμι με ταχύτητα ροής $\upsilon_1 = 4$ m/s προς τα δεξιά. Εάν αφήσουμε ελεύθερο ένα αντικείμενο να επιπλεύσει, π.χ. ένα κλαδί δέντρου, θα παρασυρθεί από την ροή με την ίδια ταχύτητα:

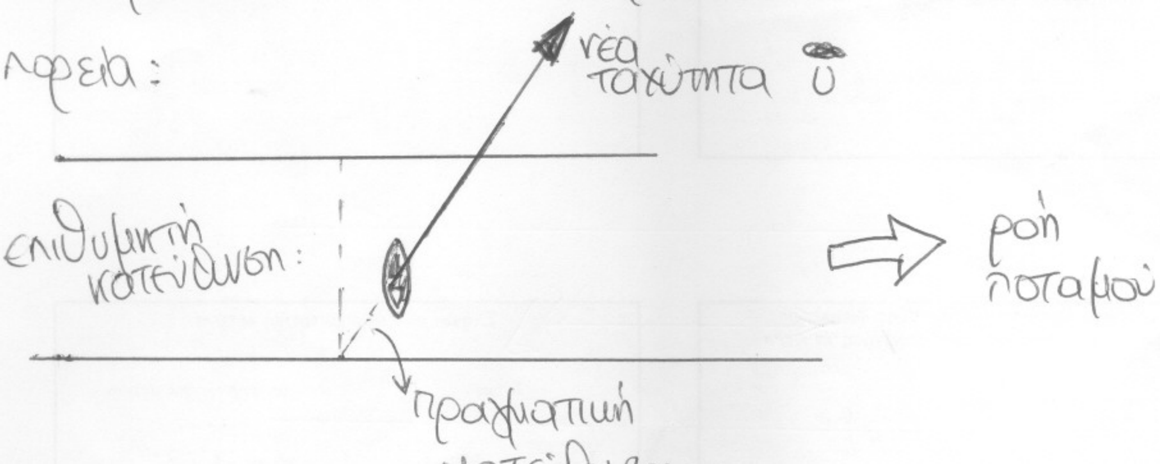


Έστω ότι κάποια άλλη ημέρα, τα νερά του ποταμού είναι στάσιμα. Εάν εμείς επιχειρήσουμε να διασχίσουμε το ποτάμι με μια μηχανοκίνητη βάρκα, μπορούμε εύκολα να παραμείνουμε σε μια ευθεία κάθετη στην όχθη του ποταμού. Έστω ότι η βάρκα μας κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 3$ m/s

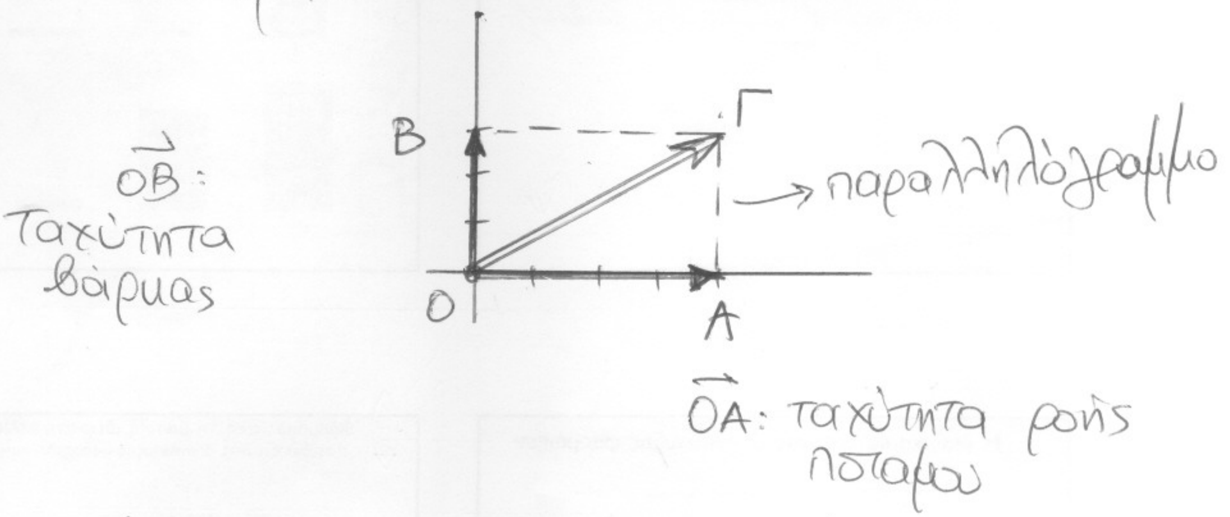


ροή = 0

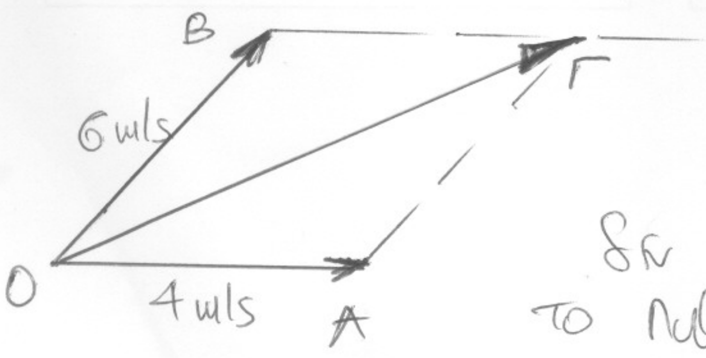
Εαν ξαναεπιχειρήσουμε να διασχίσουμε το ποτάμι μια ημέρα που ξανά τα νερά είναι ορμητικά με ταχύτητα $u_1 = 4$ m/s, τότε ακόμη και εάν σημαδεύουμε την απέναντι όχθη, η βάρκα παρασύρεται εν μέρει προς τα δεξιά, λόγω της ορμής του ποταμού. Έτσι η βάρκα ακολουθεί μια διαγώνια πορεία:



~~νέα ταχ~~ Προφανώς η βάρκα κάνει ένα συνδυασμό κινήσεων. Παρασύρεται προς τα δεξιά όπως το κλαδί προηγουμένως, αλλά ταυτόχρονα και η μηχανή του το ωθεί προς την απέναντι όχθη. Η νέα του ταχύτητα βρίσκεται με τον κανόνα του παραλληλογράμμου: "Ζωγραφίζουμε" τις δύο αρχικές ταχύτητες (του ποταμού και της βάρκας) σε κοινή αρχή (ως συνήθως το O) και σχηματίζουμε ένα παραλληλόγραμμο με πλευρές τα διανύσματα (στην συγκεκριμένο παράδειγμα ένα ορθογώνιο). Η διαγώνιος ΟΓ του παραλληλογράμμου που περνάει από το O περιγράφει το νέο διάνυσμα $\vec{O\Gamma}$ που είναι το άθροισμα των δύο αρχικών διανυσμάτων:



Στην συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $|\vec{O\Gamma}| = 5$ m/s. Εάν τα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ δεν σχηματίζουν γωνία 90° μεταξύ τους, η διαδικασία είναι η ίδια:



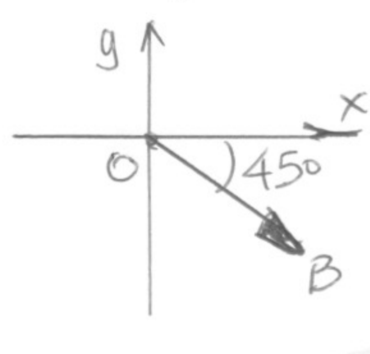
Εδώ ο υπολογισμός του $|\vec{O\Gamma}|$ είναι δύσκολος γιατί δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ομοίως είναι δύσκολος και ο υπολογισμός των γωνιών.

Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση του αθροίσματος των διανυσμάτων, είναι πιο εύκολο να δουλεύουμε στην περιγραφή με τις συντεταγμένες. Αυτό γίνεται λόγω ενός μαθηματικού θεωρήματος που λέει ότι εάν x_1 και y_1 είναι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{OA}$ και x_2 και y_2 οι αντίστοιχες συντεταγμένες ενός άλλου διανύσματος $\vec{OB}$, τότε οι συντεταγμένες x και y του αθροίσματος $\vec{O\Gamma} = \vec{OA} + \vec{OB}$ είναι απλά ίσες με

$$x = x_1 + x_2$$
$$y = y_1 + y_2$$

Δηλαδή όταν αθροίζουμε διανύσματα, αθροίζουμε απλά τις επιμέρους συντεταγμένες τους.

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί το άθροισμα του διανύσματος $\vec{OA} = (2,3)$ με το παρακάτω διάνυσμα $\vec{OB}$ που έχει μέτρο $|\vec{OB}| = 4\sqrt{2}$



Λύση: Οι συντεταγμένες του $\vec{OA}$ είναι $x_1 = 2$ και $y_1 = 3$ (σε κάποιες μονάδες). Από απλή τριγωνομετρία οι συντεταγμένες του $\vec{OB}$ είναι

$$x_2 = \sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$y_2 = -\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ = -\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

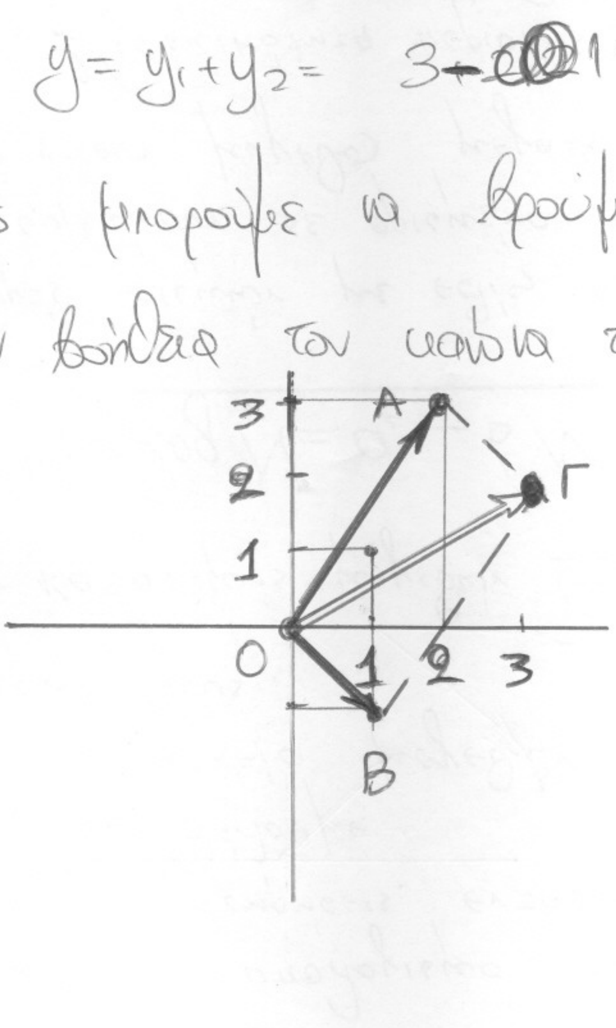
(Τα "cos" και "sin" είναι οι διεθνείς μαθηματικοί όροι για το συνημίτονο και ημίτονο αντίστοιχα).

Έτσι το άθροισμα $\vec{O\Gamma} = \vec{OA} + \vec{OB}$ θα έχει συντεταγμένες

$$x = x_1 + x_2 = 2 + 1 = 3$$

$$y = y_1 + y_2 = 3 - 1 = 2$$

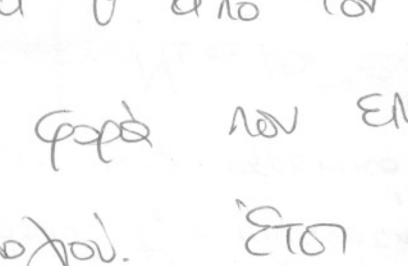
Γεωμετρικώς μπορούμε να βρούμε την κατεύθυνσή του με την βοήθεια του κανόνα του παραλληλογράμμου:



Σημείωση:

Όπως είδαμε εάν γνωρίζουμε το μέτρο $|\vec{OA}|$ ενός διανύσματος, τότε οι συντεταγμένες του βρίσκονται από τις $x_1 = |\vec{OA}|\cos\theta$, $y_1 = |\vec{OA}|\sin\theta$ όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το $\vec{OA}$ με τον άξονα x.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, αυτές οι συντεταγμένες είναι αρνητικές, όπως η y_2 συνιστώσα του $\vec{OB}$ του παραπάνω παραδείγματος. Για να αποφεύγονται λάθη με τα πρόσημα, πρέπει να ορίζουμε αυστηρώς την γωνία θ από τον x άξονα με φορά αύξησης την φορά που είναι αντίθετη με την κίνηση του ρολογιού. Έτσι η γωνία του $\vec{OB}$ έπρεπε να μας δίνεται ως $\theta = 360° - 45° = 315°$. Τότε



εάν παίρναμε με "κλειστά μάτια" τους τύπους

$$x_2 = |\vec{OB}|\cos 315° = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$y_2 = |\vec{OB}|\sin 315° = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$$ τότε

καταλήγουμε στο σωστό πρόσημο αφού το ημίτονο των 315° είναι -1. Αντιθέτως εάν παίρναμε $\theta = 45°$ θα έπρεπε αυθαίρετα να προσθέσουμε ένα (−) μείον στην

y_2 αφού το ημίτονο των 45° είναι $+1$ και όχι -1.

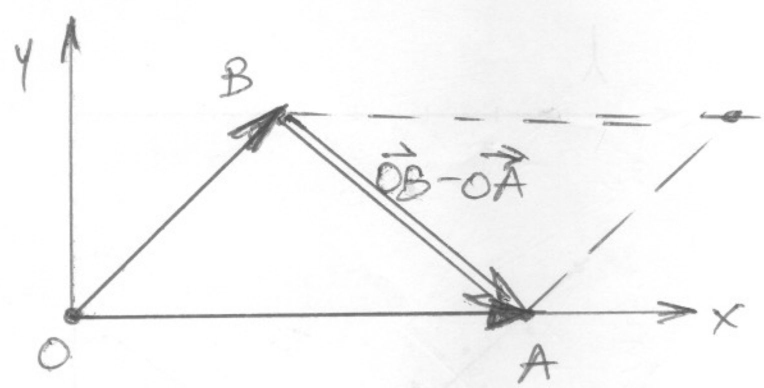
β) Η διαφορά δύο διανυσμάτων.

Οι κανόνες του διανύσματος $\vec{OB}-\vec{OA}$ είναι παρόμοιοι με αυτούς του αθροίσματος. Οι συντεταγμένες της διαφοράς ισούνται με

$x = x_2 - x_1$
$y = y_2 - y_1$

όπου $\vec{OB} = (x_2, y_2)$ και $\vec{OA} = (x_1, y_1)$.

Γεωμετρικώς πάλι σχηματίζουμε το ίδιο παραλληλόγραμμο αλλά τώρα επιλέγουμε την άλλη διαγώνιο BA:



Το διάνυσμα $\vec{BA} = \vec{OB} - \vec{OA}$ δηλαδή είναι η διαφορά των δύο διανυσμάτων. Φυσικά το $\vec{BA}$ μπορούμε να το μεταφέρουμε στην αρχή των αξόνων εάν επιθυμούμε, με παράλληλη μετατόπιση.

γ) Εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων.

Το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ συμβολίζεται ως $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ δηλαδή χρησιμοποιούμε μια έντονη τελεία μεταξύ των $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$, και το αποτέλεσμα είναι ένας απλός αριθμός. Εαν $\vec{OA} = (x_1, y_1)$ και $\vec{OB} = (x_2, y_2)$ τότε ο αριθμός αυτός ισούται με:

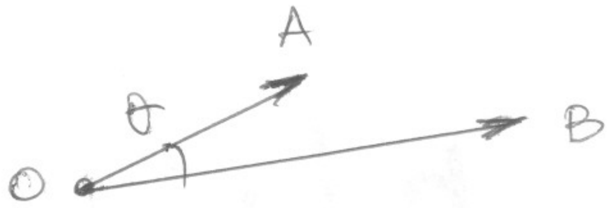
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Παράδειγμα.

Εαν $\vec{OA} = (2,3)$ και $\vec{OB} = (1,-1)$ τότε

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 2 - 3 = -1.$$

Υπάρχει και ένας άλλος τύπος για το εσωτερικό γινόμενο, πολύ πιο χρήσιμος στην φυσική. Εαν $|\vec{OA}|$ είναι το μέτρο του $\vec{OA}$, $|\vec{OB}|$ το μέτρο του $\vec{OB}$ και θ η γωνία μεταξύ τους, τότε $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \, |\vec{OB}| \cos\theta$



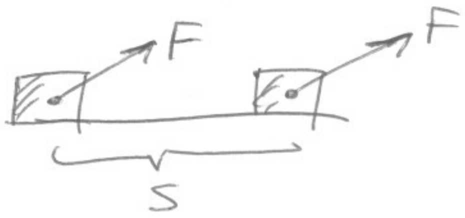
Παράδειγμα

Εάν στο παραπάνω σχήμα το $\vec{OA}$ έχει μέτρο 5 και το $\vec{OB}$ 7 (σε κάποιες μονάδες) και η θ ισούται με 30° τότε

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 5\cdot 7\cdot \cos 30^\circ = 5\cdot 7\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{2} \simeq 30,3$$

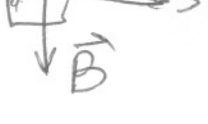
Πολλοί νόμοι της Φυσικής όπως θα δούμε, εμπεριέχουν το εσωτερικό γινόμενο, π.χ. το έργο

$$W = \vec{F}\cdot\vec{S}$$



όπου $\vec{F}$ είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα και $\vec{S}$ η μετατόπισή του.

Εάν η $\vec{F}$ δρα κάθετα στην μετατόπιση του σώματος, τότε το αντίστοιχο έργο της είναι μηδέν. π.χ. το έργο του βάρους $\vec{B}$ στο παραπάνω σχήμα



. Έχουμε $W_B = \vec{B}\cdot\vec{S} = 0$ γιατί $\cos 90^\circ = 0$.