ΚΥΛΙΣΗ

Η κύλιση είναι μια ειδική περίπτωση κίνησης όπου έχουμε ένα σώμα κυκλικής διατομής που εκτελεί ταυτόχρονα περιστροφική + μεταφορική κίνηση επάνω σε έδαφος. Πριν την εξετάσουμε λεπτομερώς, καλό είναι να κάνουμε μια σύγκριση μεταφορικής - περιστροφικής κίνησης γιατί θα μας χρειαστούν και οι δυο κινήσεις. Επίσης θα ορίσουμε και νέες ποσότητες στην περιστροφική κίνηση όπως η κινητική ενέργεια, η ισχύς, η στροφορμή κ.λ.π. Θεωρήστε τον παρακάτω πίνακα:

Οντότητα	ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ	ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ	Σύνδεση
Απομάκρυνση	x	θ	$x=R\theta$ κυκλική
Ταχύτητα	$v=x'$	$\omega=\theta'$	$v=R\omega$ κίνηση
Επιτάχυνση	$a=v'$	$\alpha=\omega'$	$a=R\alpha$ + κύλιση
Μάζα - Ροπή Αδρ.	m	$I=mr^2$	
Ορμή - Στροφορμή	$p=mv$	$L=I\omega$	$p=rL$
Κινητική Ενέργεια	$K=\frac{1}{2}mv^2$	$K=\frac{1}{2}I\omega^2$	
Δύναμη - Ροπή	F	τ	$\tau=rF\sin\theta$
Έργο	$W=\int_{x_1}^{x_2} F\,dx$	$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\,d\theta$	Σημείωση: R είναι η ακτίνα κύκλου και r η απόσταση από τον άξονα περιστροφής.
Ισχύς $P=\frac{dW}{dt}$	$P=Fv$	$P=\tau\omega$	
$2^{ος}$ Νόμος Νεύτωνα	$\Sigma F=ma$	$\Sigma\tau=I\alpha$	

Κάποιες ποσότητες όπως η κινητ. ενέργεια, το έργο και η ισχύς έχουν τις ίδιες μονάδες και στις δυο κινήσεις. Οι υπόλοιπες διαφέρουν, πχ ορμή $p=mv$ σε $kg \cdot \frac{m}{s}$ ενώ η αντίστοιχη στροφορμή $L = I\omega = kg \cdot m^2 \cdot \frac{rad}{s}$. Οι ποσότητες που έχουν ίδιες μονάδες, προστίθενται όταν έχουμε συνδυασμό κινήσεων

Π.χ: $$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$: ολική κινητ. ενέργεια

Κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς του κέντρου μάζας με ταχύτητα υ

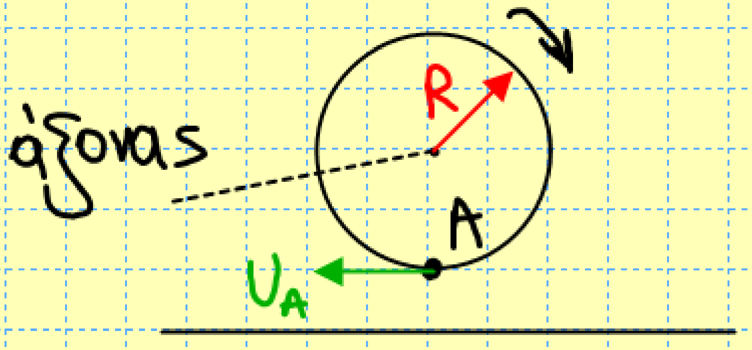
Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας με γων. ταχύτητα ω

Από τον πρώτο όρο παραπάνω, φαίνεται ως όλη η μάζα m να είναι συγκεντρωμένη στο Κ.Μ. κατά τη μεταφορική κίνηση

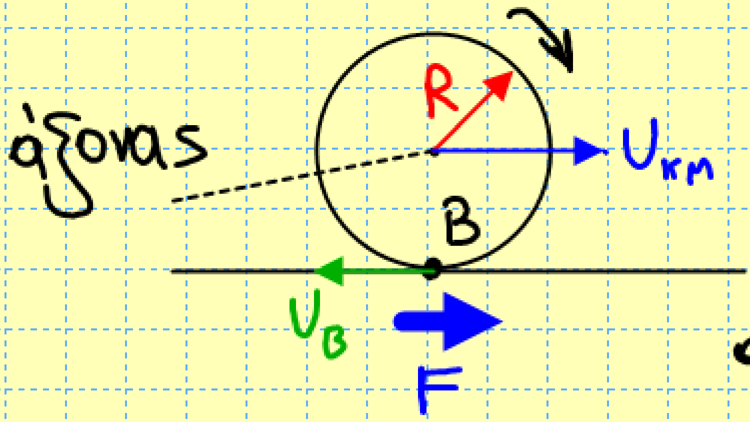
Ορισμός κύλισης

Η κύλιση είναι μια ειδική περίπτωση κίνησης όπου έχουμε ένα σώμα κυκλικής διατομής που εκτελεί ταυτόχρονα περιστροφική + μεταφορική κίνηση επάνω σε έδαφος και που το χαμηλότερο σημείο του εφάπτεται στο έδαφος και είναι στιγμιαία ακίνητο ως προς αυτό.

Για να δούμε πως γίνεται αυτό, ας θεωρήσουμε για απλότητα ότι αρχικώς το σώμα βρίσκεται υπερυψωμένο επάνω από το έδαφος και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του:



Τότε το χαμηλότερο σημείο της κυκλικής διατομής, το Α, κινείται με γραμμική ταχύτητα $υ_A = ωR$ όπου R η ακτίνα του κύκλου. Έστω ότι τώρα αρχίζουμε σιγά-σιγά να χαμηλώνουμε το σώμα ενώ αυτό ακόμη περιστρέφεται. Κάποια στιγμή όταν το χαμηλότερο σημείο, έστω το Β, ακουμπήσει στο έδαφος, προσπαθεί λόγω της περιστροφικής του κίνησης να πιέσει το έδαφος προς τα αριστερά. Λόγω δράσης-αντίδρασης



Το έδαφος ασκεί στο σώμα μια δύναμη $\vec{F}$ προς τα δεξιά και έτσι το σώμα αποκτάει και μεταφορική κίνηση, δηλαδή το κέντρο μάζας κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $υ_{κμ}$. Έτσι το σημείο Β έχει τώρα δυο γραμμικές ταχύτητες, την $υ_{B_1} = Rω$ λόγω περιστροφής με κατεύθυνση προς τα αριστερά, και την $υ_{B_2} = υ_{κμ}$ λόγω της μεταφοράς του Κ.Μ. προς τα δεξιά. Εάν $υ_{B_1} = υ_{B_2}$ τότε το Β παραμένει στιγμιαία ακίνητο και τότε έχουμε κύλιση. Είναι ενδιαφέρον να δούμε τρεις ξεχωριστές περιπτώσεις, ανάλογα με τη σχετική κίνηση σώματος - εδάφους:

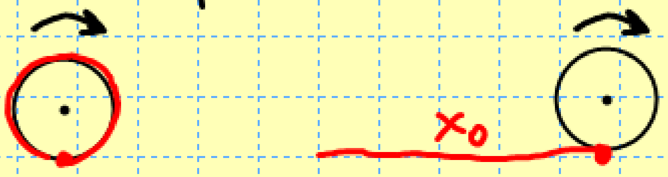
Περίπτωση α) έδαφος χωρίς τριβή, π.χ. πάγος
Τότε $\vec{F}=0$ και $\upsilon_{B_2}=0$. Το σώμα διατηρεί τότε την περιστροφική κίνηση σαν να μην υπάρχει το έδαφος (π.χ. "σπινιάρισμα" ρόδας)

Περίπτωση β) Παύση περιστροφής. Μπορεί π.χ. με την εφαρμογή μιας εξωτερικής δύναμης πέδησης, να "μπλοκάρουμε" την περιστροφή ώστε $\upsilon_{B_1}=0$ αλλά το σώμα να συνεχίσει να ολισθαίνει επάνω στο έδαφος ώστε $\upsilon_{B_2}\neq 0$ (π.χ. "γλύστριμα" μπλοκαρισμένου τροχού)

Περίπτωση γ) Η κύλιση που προαναφέρθηκε όπου

$$\upsilon_{B_1} = \upsilon_{B_2}$$

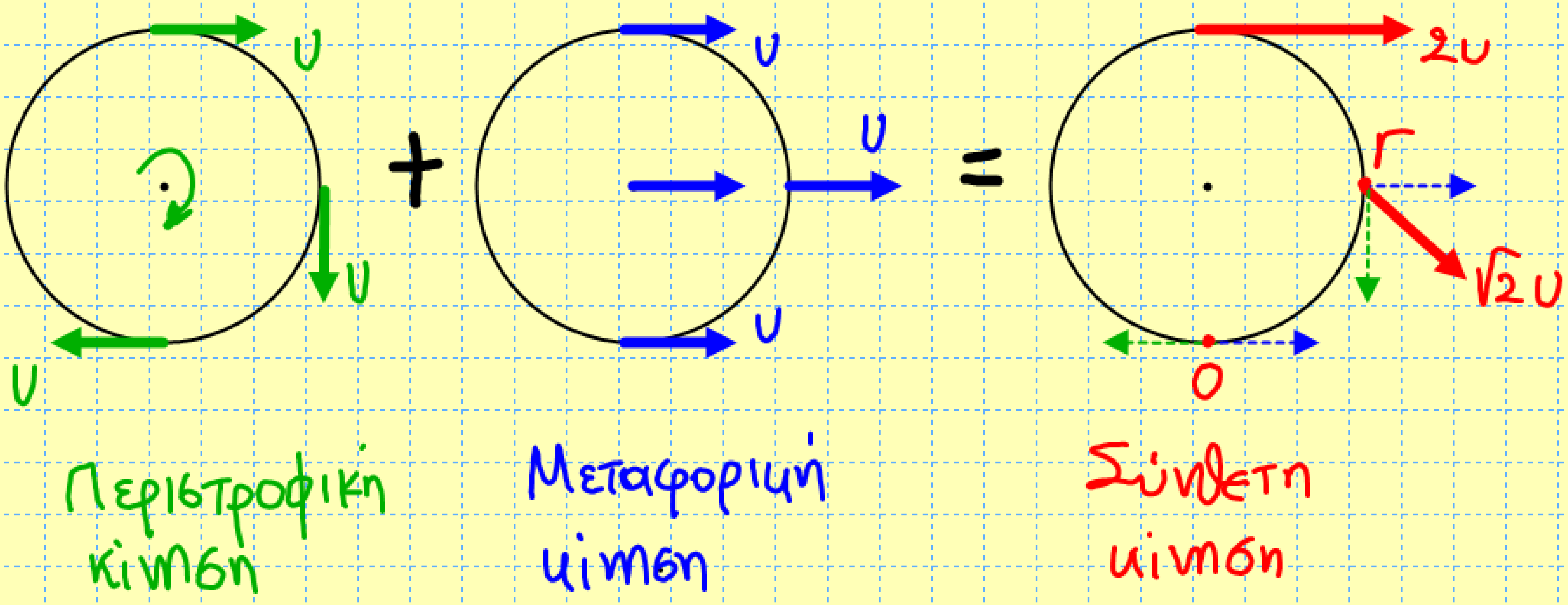
Ενδιαφέρον παρουσιάζει στην κύλιση η σχέση των γωνιακών και γραμμικών μεγεθών όπως π.χ. το θ και το x. Πόση απόσταση x_0 έχει διανύσει το κέντρο μάζας όταν το σώμα έχει περιστραφεί κατά ένα πλήρη κύκλο; Αυτό μπορούμε να το βρούμε εύκολα με ένα ιδεατό πείραμα. Εαν τυλίξουμε το σώμα με ένα κουβάρι, τότε το x_0 θα ισούται με το μήκος του κουβαριού που ξετυλίχθηκε. Όπως είναι φανερό, σε ένα πλήρη κύκλο ξετυλίγεται κουβάρι με μήκος ίσο με την περιφέρεια του κύκλου, δηλαδή $x_0 = 2\pi R$. Το 2π είναι η γωνία θ_0 ενός πλήρους κύκλου οπότε $x_0 = R\theta_0$. Κατ



αναλογία μπορούμε να γράψουμε $x=R\theta$ για μια τυχαία γωνία όπου x είναι η αντίστοιχη απόσταση που διανύει το κέντρο μάζας του σώματος. Αυτή η σχέση είναι παρόμοια με την $x=R\theta$ στην κυκλική κίνηση όπου x είναι η γραμμική μετατόπιση ενός σημείου στην περιφέρεια του κύκλου. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο έχουμε $x'=R\theta' \Rightarrow u=R\omega$ όπου u είναι η ταχύτητα του Κ.Μ. και ω η γωνιακή ταχύτητα. Ξαναπαραγωγίζοντας έχουμε $u'=R\omega' \Rightarrow a=R\alpha$ όπου a είναι η επιτάχυνση του Κ.Μ. και α η γων. επιτάχυνση.

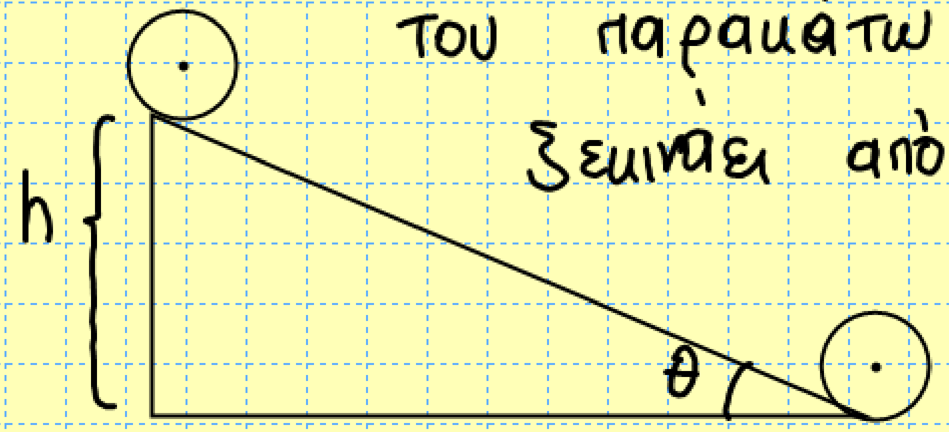
Κύλιση : Κέντρο μάζας $\left\{ \begin{array}{l} x=R\theta \\ u=R\omega \\ a=R\alpha \end{array} \right\}$ Γωνιακά μεγέθη της περιστροφής γύρω από το Κ.Μ.

Όταν έχουμε κύλιση, εκτός από το χαμηλότερο σημείο ποιά είναι η ταχύτητα των άλλων σημείων του σώματος; Όπως είπαμε παραπάνω, στην κύλιση το σώμα κάνει συνδυασμό περιστροφικής και μεταφορικής ταχύτητας, με ταχύτητα υ του κέντρου μάζας ίση με την εφαπτομενική



ταχύτητα της περιστροφικής κίνησης. Έτσι στο χαμηλότερο σημείο οι δυο ταχύτητες αλληλοαναιρούνται και η συνολική ταχύτητα είναι 0. Αντιθέτως στο υψηλότερο σημείο οι δυο ταχύτητες προστίθονται σε 2υ. Σε ενδιάμεσα σημεία όπως το Γ πρέπει να πάρουμε διανυσματικό άθροισμα.

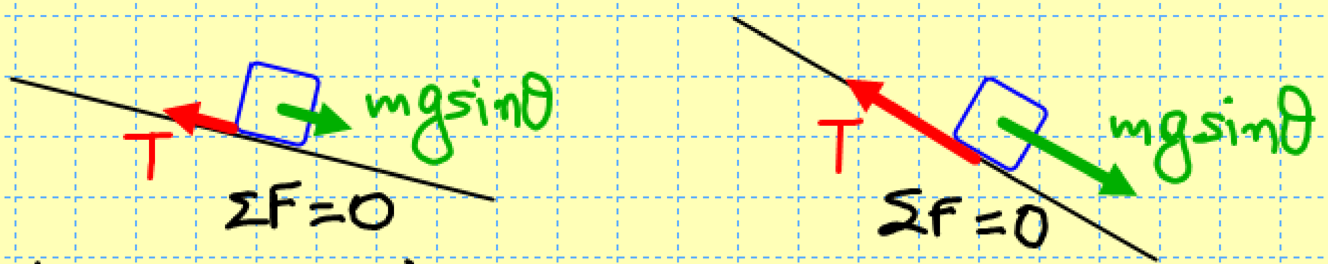
✓ Παράδειγμα: Κύλινδρος αφήνεται στο υψηλότερο σημείο της κεκλιμένης τροχιάς του παρακάτω σχήματος. Εαν ο κύλινδρος ξεκινάει από την ηρεμία και ακολούθως εκτελεί κύλιση λόγω της



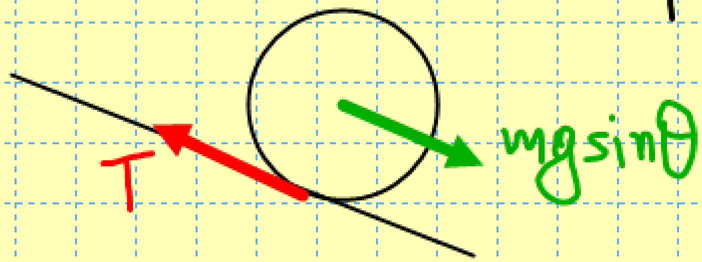
ύπαρξης τριβής στο επίπεδο, να βρεθούν τα ακόλουθα:
α) Η γραμμική (του Κ.Μ.) και η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου β) Η δύναμη της τριβής. γ) Η τελική γραμμική ταχύτητα (του Κ.Μ.) στο χαμηλότερο σημείο. Δίνονται η μάζα m και η ακτίνα R του κυλίνδρου

<u>Λύση</u>: α) Όταν ο κύλινδρος αφεθεί ελεύθερος, τείνει να κινηθεί προς τα κάτω της τροχιάς λόγω της συνιστώσας του βάρους. Το επίπεδο αντιδράει σε αυτή την κίνηση εφαρμόζοντας μια δύναμη τριβής T προς τα επάνω της τροχιάς. Ας συγκρίνουμε αυτό το πρόβλημα με το αντίστοιχο πρόβλημα ενός σώματος με επίπεδη επιφάνεια επαφής όπως π.χ. ένας κύβος. Γνωρίζουμε από τη

καθημερινή μας εμπειρία ότι εάν η κλίση είναι μικρή, το σώμα δεν ολισθαίνει γιατί η στατική τριβή T αναιρεί την συνιστώσα $mg\sin\theta$ του βάρους. Εάν αυξήσουμε ελαφρά την κλίση, η στατική τριβή αυτοπροσαρμόζεται (μέχρι ενός ορίου) και διατηρεί την παραπάνω συνθήκη (είδαμε στο εδάφιο "Τριβή" ότι η στατική τριβή T δεν είναι σταθερή αλλά $T \leq T_{max}$ όπου και αρχίζει η ολίσθηση):



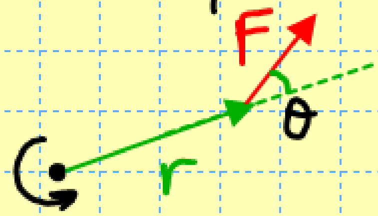
Επιστρέφοντας τώρα στον κύλινδρο, τοπικά ένα απειροστό μικρό κομμάτι του που βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος, μπορεί να θεωρηθεί πρακτικώς επίπεδο. Με την ίδια λογική όπως και με τον κύβο, η δύναμη τριβής του επιπέδου αυτοπροσαρμόζεται προσπαθώντας να κρατήσει αυτό το απειροστό κομμάτι του κυλίνδρου ακίνητο. Επειδή όμως κρατάει μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό του κυλίνδρου ακίνητο, το υπόλοιπο τείνει να κινηθεί $\Rightarrow$ έχουμε την περίπτωση κύλισης (ακίνητο μόνο το χαμηλότερο σημείο στιγμιαίως). Κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, δρουν μόνο δυο δυνάμεις, η τριβή

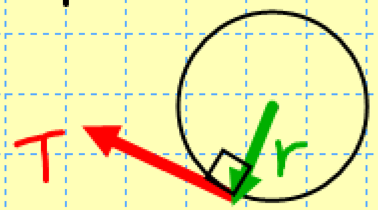


T και η συνιστώσα του βάρους $mg\sin\theta$ η οποία δρα στο Κ.Μ. του κυλίνδρου. Ο 2^{ος}

νόμος του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση δίνει:

$\Sigma F = ma \Rightarrow mg\sin\theta - T = ma$ (1) όπου θεωρήθηκε η προς τα κάτω φορά θετική. Για να υπολογίσουμε τις ροπές στην περιστροφική κίνηση, χρησιμοποιούμε τον τύπο $\tau = rF\sin\theta$ σύμφωνα με το διπλανό σχήμα (ορισμός ροπής). Το βάρος δρα επάνω στο Κ.Μ. από το οποίο περνάει ο άξονας περιστροφής. Έτσι $r = 0$ και δεν δημιουργεί ροπή. Αντιθέτως η τριβή δρα κάθετα ως προς την ακτίνα του κυλίνδρου και έτσι





$\sin\theta = 1$, $r = R$ και η ροπή ισούται με

$$\tau = rF\sin\theta = RT$$

Ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή γίνεται:

$\Sigma\tau = I\alpha$ Εδώ έχουμε μόνο μια ροπή $\tau = RT$. Η ροπή αδράνειας κυλίνδρου I ισούται με $1/2\, mR^2$. Επίσης στην κύλιση έχουμε $\alpha = a/R$. Βάζοντας τα όλα μαζί έχουμε:

$\tau = I\alpha \Rightarrow \cancel{R}T = \frac{1}{2} m\cancel{R^2}\frac{a}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} ma}$ (2). Από τις εξισώσεις 1 και 2 έχουμε $a = \frac{2}{3} g \sin\theta$. β) Αντικαθιστώντας στην 2 έχουμε $T = \frac{1}{3} mg \sin\theta$. γ) Από το θεώρημα έργου-ενέργειας έχουμε $\Delta K = W_B + W_T$ όπου W_B και W_T είναι αντίστοιχα το έργο του βάρους και της τριβής και ΔK η μεταβολή της κινητικής ενέργειας $K_{τελ} - K_{αρχ}$. Αφού το σώμα αρχικά ηρεμεί $K_{αρχ} = 0$. Το βάρος είναι συντη-

ρητική δύναμη και έτσι προκύπτει από δυναμική ενέργεια $U = mgh$. Επομένως $W_B = -\Delta U = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda}$. Αφού το σώμα καταλήγει σε μηδενικό ύψος $U_{\tau\varepsilon\lambda} = 0$. Έτσι το θεώρημα έργου-ενέργειας δίνει $K_{\tau\varepsilon\lambda} = U_{\alpha\rho\chi} + W_T$. Εάν το σώμα διανύσει απόσταση x τότε το έργο της τριβής λόγω μεταφορικής κίνησης ισούται με $W_{T_1} = -Tx$. Το μείον είναι επειδή η T είναι αντίθετη με την μετατόπιση. Αντιθέτως η ροπή της τριβής $\tau = TR$ προκαλεί αύξηση της γωνίας θ, επομένως το αντίστοιχο έργο της είναι $W_{T_2} = \int \tau d\theta = TR\theta$. Όμως στην κύλιση ισχύει $x = R\theta$ και έτσι $W_{T_2} = Tx$. Το συνολικό έργο $W = W_{T_1} + W_{T_2} = 0$ και $K_{\tau\varepsilon\lambda} = U_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow$
$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = mgh$. Με $I = \frac{1}{2} mR^2$ (κύλινδρος) και $\omega = \frac{v}{R}$ (κύλιση) βρίσκουμε για τη ταχύτητα $v^2 = \frac{4}{3} gh$ ✓