ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ (για σημειακές μάζες)

1) Εάν σε ένα σώμα το σύνολο των δυνάμεων $\Sigma\vec{F}$ που δρουν επάνω του είναι μηδέν, τότε το σώμα διατηρεί την κινητική του κατάσταση, δηλαδή εάν ήταν ακίνητο τότε παραμένει ακίνητο και εάν κινείτο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, τότε θα συνεχίσει να κινείται με την ίδια ταχύτητα.

2) Εάν απεναντίας το σύνολο των δυνάμεων $\Sigma\vec{F}$ είναι διάφορο του μηδενός, τότε το σώμα αποκτάει επιτάχυνση $\vec{a}$ σύμφωνα με την εξίσωση:

$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ όπου m: η μάζα του σώματος

3) Εάν ένα σώμα 1 ασκεί μια δύναμη $\vec{F}_{12}$ σε ένα άλλο σώμα 2, τότε και το 2 ασκεί μια δύναμη $\vec{F}_{21}$ στο 1, τέτοια που

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \text{(Δράση αντίδραση)}$$

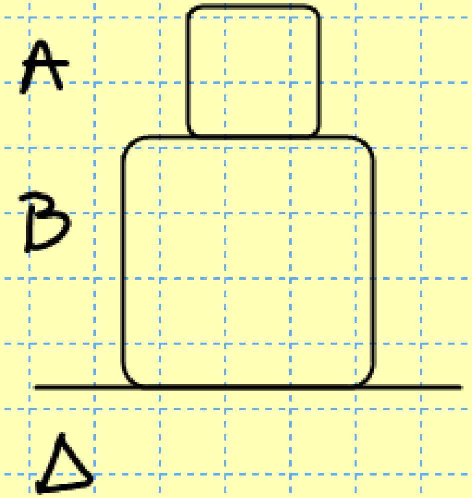
Συνοπτικά

1) $\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{\upsilon} = 0 \\ \vec{\upsilon} : \text{σταθερή} \end{cases}$ ή

2) $\Sigma \vec{F} \neq 0 \Rightarrow a = \frac{1}{m} \Sigma \vec{F}$

3) $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

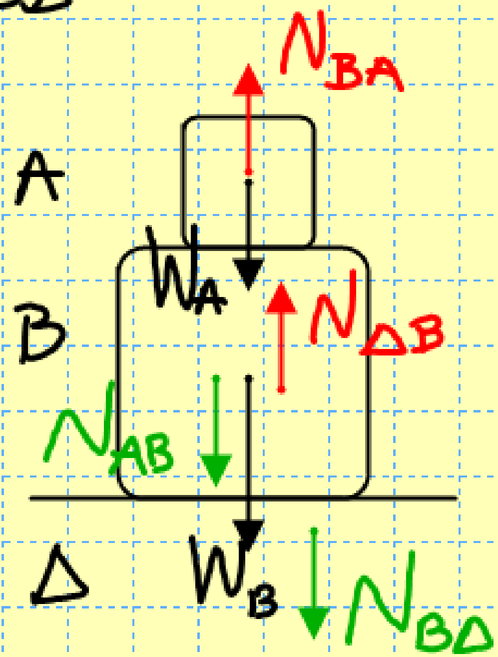
δ) Παράδειγμα: Δυο κιβώτια Α και Β βρίσκονται το ένα πάνω στο άλλο σε οριζόντιο δάπεδο. Να βρεθούν όλες οι δυνάμεις που δρουν στα κιβώτια και να συσχετιστούν μεταξύ τους.



<u>Λύση</u>: Κατ' αρχάς στα δύο σώματα Α και Β δρουν τα βάρη τους $\vec{W}_A$ και $\vec{W}_B$.

Επιπλέον, το Β παίζει τον ρόλο του δαπέδου για το Α και έτσι το Α "αισθάνεται μια κάθετη αντίδραση $\vec{N}_{BA}$ (από το Β στο Α). Από τον 3^o νόμο του Νεύτωνα, πρέπει και το Α να ασκεί μια ίση και αντίθετη δύναμη $\vec{N}_{AB}$ στο σώμα Β. Με την ίδια λογική, το δάπεδο Δ ασκεί μια δύναμη $\vec{N}_{\Delta B}$ στου Β και το Β αντιδρά με μια ίση και αντίθετη δύναμη $\vec{N}_{B\Delta}$

Σχηματικά οι δυνάμεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Με μαύρο χρώμα είναι τα βάρη ενώ τα ζεύγη δράσης αντίδρασης σημειώνονται με κόκκινο - πράσινο.



Αφού το Α ισορροπεί (δηλαδή η ταχύτητά του είναι 0) τότε από τον 1ο νόμο έχουμε $\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{N}_{BA}+\vec{W}_A=0$

Παίρνοντας την προς τα πάνω φορά ως θετική, έχουμε $\vec{N}_{BA}=N_{BA}\hat{y}$ και $\vec{W}_A=-W_A\hat{y}$ όπου $\hat{y}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα y. Έτσι η εξίσωση των μέτρων δίνει $N_{BA}-W_A=0 \Rightarrow$

$$N_{BA}=W_A \quad (1)$$

Με την ίδια λογική το σώμα Β ισορροπεί και έτσι $N_{\Delta B}-N_{AB}-W_B=0 \Rightarrow N_{\Delta B}=N_{AB}+W_B$ (2)

Όμως η $\vec{N}_{AB}$ είναι η αντίδραση της $\vec{N}_{BA}$

και έτσι κατά μέτρο έχουμε $N_{BA} = N_{AB} = W_A$ (το τελευταίο βήμα προέκυψε από την ①). Αντικαθιστώντας στην ② έχουμε $N_{B\Delta} = W_A + W_B$ δηλαδή το δάπεδο "αισθάνεται" τα βάρη και των δύο σωμάτων, κάτι που το γνωρίζουμε και από την καθημερινή μας εμπειρία.

δ) Παράδειγμα: Μια δύναμη $F(t) = bt$ όπου b: μια σταθερά και t: ο χρόνος, εφαρμόζεται στην μια διάσταση x σε σημειακή μάζα m. Εάν η μάζα ξεκινάει από το $x=0$ σε ηρεμία, να βρεθούν η ταχύτητα της $v(t)$ και η απομάκρυνση της $x(t)$ για πάσα χρονική στιγμή.

<u>Λύση</u>: Από τον 2^{o} νόμο του Νεύτωνα σε μια διάσταση έχουμε για την επιτάχυνση: $a(t) = \frac{1}{m} F(t)$ ή $a(t) = \frac{\beta}{m} t$. Ολοκληρώνοντας μια φορά έχουμε:

$$v(t) = \frac{\beta}{2m} t^2 + c_1 .$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε $v(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά έχουμε:

$$x(t) = \frac{\beta}{6m} t^3 + c_2$$

Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει επίσης $c_2 = 0$.

δ) Παράδειγμα: Η δύναμη $\vec{F} = (b\sin\omega t, -\gamma)$ όπου b, γ, ω: σταθερές, εφαρμόζεται σε σημειακή μάζα m στις δυο διαστάσεις. Εάν την χρονική στιγμή $t=0$ το κινητό βρίσκεται στο $\vec{r} = 0$ με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0 = \left(-\frac{b}{m\omega}, 0\right)$ να βρεθούν τα $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$

<u>Λύση</u>: Από τον 2^{o} νόμο του Νεύτωνα, αναλύοντας σε συνιστώσες x και y έχουμε:

$$a_x = \frac{1}{m} F_x = \frac{1}{m} b\sin\omega t \quad \text{και} \quad a_y = \frac{1}{m} F_y = -\frac{\gamma}{m}$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$v_x = -\frac{b}{m\omega}\cos\omega t + c_1 \quad \text{και} \quad v_y = -\frac{\gamma}{m} t + c_2$$

Από τις αρχικές συνθήκες $v_x(0) = -\frac{b}{m\omega}$ και $v_y(0)=0$ έχουμε $c_1=0$ και $c_2=0$. Ολοκληρώνοντας άλλη μια φορά έχουμε

$$x = -\frac{b}{m\omega^2}\sin\omega t + c_3 \quad \text{και} \quad y = -\frac{\gamma}{2m}t^2 + c_4$$

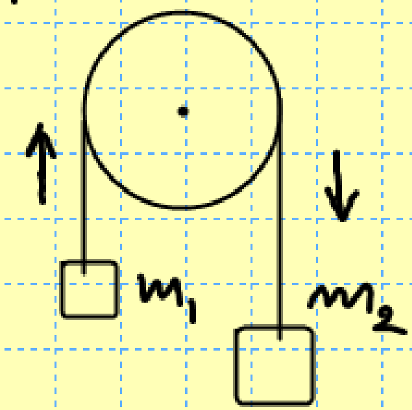
Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε $c_3=0$ και $c_4=0$

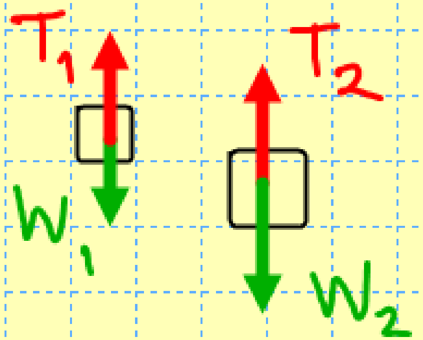
Η κίνηση είναι ταλάντωση ως προς x και επιταχυνόμενη ως προς y με αρνητική επιτάχυνση $-\frac{\gamma}{m}$

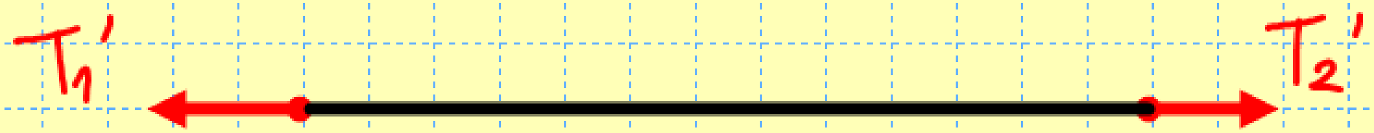
ο) Παράδειγμα: Στο παρακάτω σχήμα $m_2 > m_1$. Να βρεθεί η επιτάχυνση της m_1 εαν η τροχαλία και το νήμα είναι αβαρή και το νήμα είναι μη εκτατό.

Λύση:

Στις μάζες m_1 και m_2 δρουν τα βάρη τους W_1 και W_2 καθώς και οι τάσεις του νήματος T_1 και T_2. Ποιά είναι όμως η σχέση των T_1 και T_2; Εαν δούμε το νήμα ως ξεχωριστό σώμα, τότε η κατάσταση μοιάζει με την εξής:







όπου T_1' και T_2' είναι οι δυνάμεις που ασκούν οι m_1 και m_2 αντίστοιχα στο νήμα. Από τον 3ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε $T_1' = T_1$ και $T_2' = T_2$. Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε για το νήμα:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow T_2 - T_1 = ma$$

Όμως το νήμα είναι αβαρές $\Rightarrow m = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$ (1)

Αφού το νήμα είναι μη εκτατό $\Rightarrow$ κάθε σημείο του κινείται με την ίδια ταχύτητα $\Rightarrow$ άρα και τα άκρα του $\Rightarrow$ άρα και οι μάζες m_1 και m_2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ οι m_1 και m_2 έχουν την ίδια επιτάχυνση a κατά μέτρο. Αλλά η τροχαλία τους αλλάζει τη φορά. Θεωρώντας την προς τα πάνω φορά θετική, ο 2ος νόμος για τις δυο μάζες γίνεται (θέτω $T_1 = T_2 = T$)

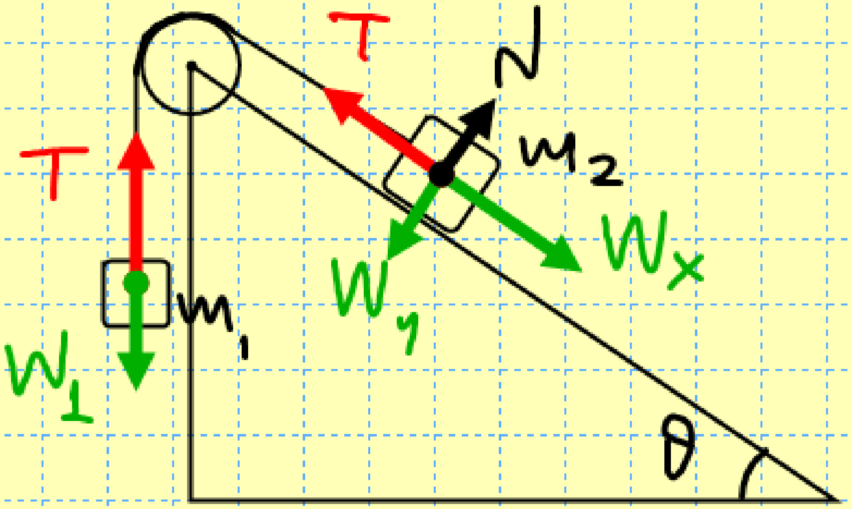
$$\left.\begin{aligned} m_1 &: \quad T - m_1 g = m_1 a \\ m_2 &: \quad T - m_2 g = -m_2 a \end{aligned}\right\} \text{ Αφαιρούμε κατά μέλη:}$$

$$(m_2 - m_1) g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

Προσέξτε ότι το αποτέλεσμα είναι διαισθητικώς σωστό. Για ίσες μάζες η επιτάχυνση είναι 0 όπως θα περιμέναμε αφού οι μάζες θα ισορροπούσαν σε αυτή τη περίπτωση. Για $m_2 > m_1$ όπως μας δίνεται, $a > 0$ και η m_1 πηγαίνει προς τα πάνω. Στην αντίθετη περίπτωση $a < 0$ και η m_1 θα κατευθυνθεί προς τα κάτω όπως αναμένεται.

ο) Παράδειγμα: Το ίδιο πρόβλημα όπως το παραπάνω, με τη διαφορά ότι η m_2 κινείται χωρίς τριβές επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ (με τον ορίζοντα).

Λύση: Όπως και παραπάνω, οι τάσεις του νήματος στις δυο άκρες του είναι ίσες.



Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για την m_1 δίνει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow T - m_1 g = m_1 a \quad (1)$$

Για την m_2 διαλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε ο άξονας x να είναι κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Αναλύουμε το βάρος W_2 σε x και y συνιστώσες $W_x = W\sin\theta$ και $W_y = W\cos\theta$. Η W_y αναιρείται από την κάθετη αντίδραση N

του δαπέδου. Ως προς τον x-άξονα, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma F = m_2 a \Rightarrow -T + W_x = m_2 a \Rightarrow -T + m_2 g \sin\theta = m_2 a \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε με πρόσθεση:

$$m_2 g \sin\theta - m_1 g = (m_2 + m_1) a \Rightarrow a = \frac{m_2 \sin\theta - m_1}{m_2 + m_1} g \checkmark$$

Το αποτέλεσμα αυτού του παραδείγματος είναι ελαφρώς διαφορετικό από το προηγούμενο. Τώρα ακόμα και εάν $m_2 > m_1$, υπάρχει μια κρίσιμη γωνία θ που δίνεται από την $m_2 \sin\theta = m_1$, κάτω από την οποία το a αλλάζει πρόσημο.