ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ.

Δ. Κουζούδης

Αρμονική κίνηση είναι η κίνηση που η μετατόπισή της x περιγράφεται από μια συνάρτηση συνημιτόνου ως προς τον χρόνο t:

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \delta)} \quad \boxed{1}$$

Οι σταθερές A, ω και δ ονομάζονται αντίστοιχα "πλάτος", "κυκλική συχνότητα" και "σταθερά φάσης".

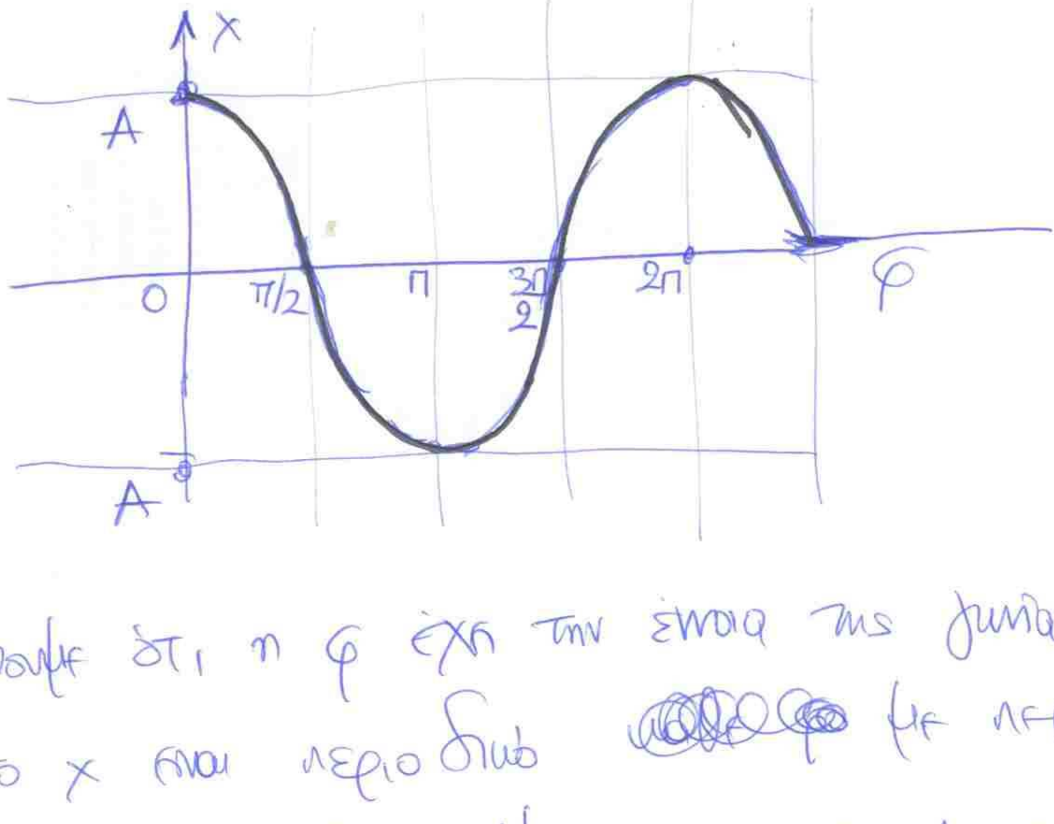
Η μετατόπιση x είναι συνήθως κάποιο μήκος ή γωνία για κινήσεις που παρατηρούμε στην καθημερινή μας ζωή, αλλά η έννοια της ταλάντωσης είναι πιο γενική. Έτσι το x μπορεί να αναπαριστάνει την ένταση E και B στους ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, την πίεση P σε ένα ηχητικό κύμα κ.ό.κ.

Για να δούμε την φυσική σημασία των σταθερών A, ω και δ, αρχικά θέτουμε δ=0 για ευκολία. Η ταλάντωση τότε περιγράφεται από την έκφραση

$$\boxed{x = A\cos\omega t} \quad (2)$$

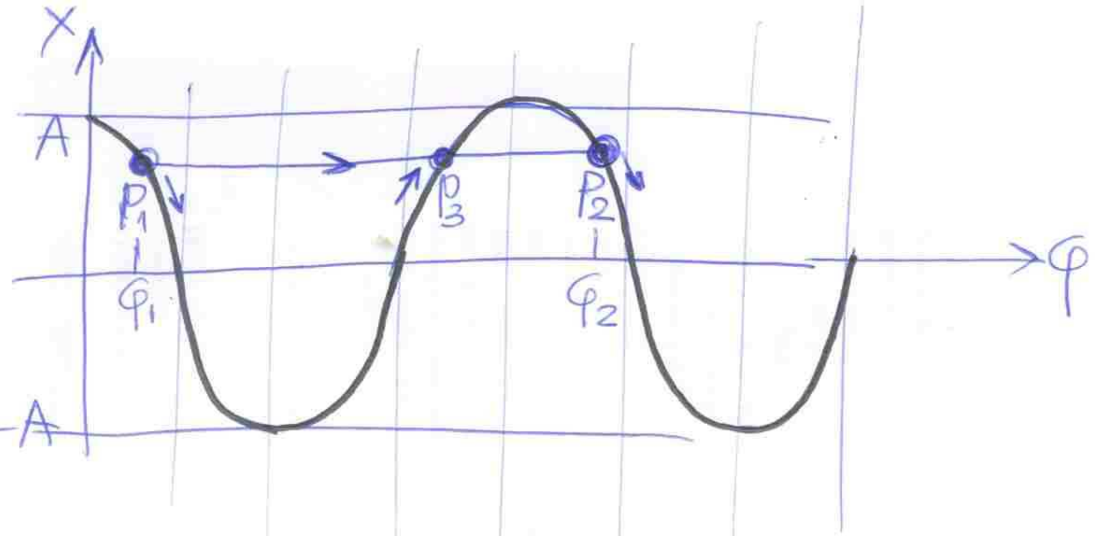
Εάν θέσουμε $\varphi = \omega t$ τότε έχουμε $x = A\cos\varphi$ η γραφ. παράσταση του οποίου φαίνεται παρακάτω.

Δ. Κα[illegible]



Βλέπουμε ότι η φ έχει την έννοια της γωνίας και ότι το x είναι περιοδικό με περίοδο της φ ίση με 2π. Η φ = ωt ονομάζεται φάση. Βλέπουμε στην γρ. παράσταση ότι το x είναι περιορισμένο μέσα στην λωρίδα $\pm A$, δηλαδή $-A \le x \le A$ και γιαυτό το A ονομάζεται πλάτος ταλάντωσης, είναι δηλαδή η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει το x.

Ας εξετάσουμε τώρα δύο σημεία P_1 και P_2 πάνω στην γρ. παράσταση που διαφέρουν κατά μια περίοδο ως προς φ, δηλαδή κατά 2π.



Δ. Κουταλίδης

Το σημείο P_1 έχει φάση $\varphi_1 = \omega t_1$ ενώ το σημείο P_2 έχει φάση $\varphi_2 = \omega t_2$ & $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$.

Όσον αφορά την κίνηση, τα P_1 και P_2 είναι εντελώς όμοια, δηλαδή έχουν το ίδιο x, και το x και στα δύο σημεία έχει την τάση να μεγαλώνει (ενώ πχ το P_1 και

P_3 έχουν αυτά το ίδιο x, όμως στο P_3 (4)

το x αυξάνει). Λέμε τότε ότι χρονικώς τα P_1 και P_2 διαφέρουν κατά μια περίοδο T. Δηλαδή έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Δ. Κατσάδης

ορισμός περιόδου T: Περίοδος T είναι ο χρόνος $T = t_2 - t_1$ μεταξύ δύο στιγμών μιας ταλάντωσης όπου η αντίστοιχη διαφορά φάσης $\varphi_2 - \varphi_1 = \omega t_2 - \omega t_1$ ισούται με 2π.

Από τον παραπάνω ορισμό παίρνουμε

$$\omega t_2 - \omega t_1 = 2\pi \Rightarrow \omega(t_2 - t_1) = 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad \boxed{3}$$

Η φυσική σημασία της περιόδου είναι ο χρόνος που χρειάζεται η κίνηση για να συμπληρώσει ένα πλήρη κύκλο. Μια σχετική έννοια είναι αυτή της συχνότητας ν που περιγράφει τον αριθμό των κύκλων που πραγματο-ποιούνται μέσα σε ένα δευτερόλεπτο. Π.χ. για μια ταλάντωση με $T = 0,25$ sec, μέσα σε 1 sec "χωράν" ακριβώς 4 περίοδοι και έτσι

$v = 4$ κύκλοι/sec.

Μπορούμε να βρούμε την σχέση μεταξύ v και T από την απλή μέθοδο των τριών:

Δ. Κοτσάκης

Σε χρόνο T sec πραγματοποιείται 1 κύκλος
-||- 1 sec -||- v? κύκλοι

παίρνουμε: $\boxed{v = \frac{1}{T}}$ (4)

α) Έτσι πχ για $T = 0,2$ sec, $v = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5\ s^{-1}$

Η συχνότητα δηλαδή έχει μονάδα s^{-1}. Καμιά φορά γράφουμε και κύκλους/s αλλά βέβαια ο κύκλος δεν είναι μονάδα αλλά το γράφουμε για ευκολία για να μας θυμίζει την φυσική σημασία της συχνότητας. Το s^{-1} του δίνουμε το όνομα μιας άλλης μονάδας, το Hertz Hz, δηλαδή $1\ Hz = s^{-1}$

Τον αριθμό των κύκλων που πραγματο- 5
ποιούνται μέσα σε ένα δευτερόλεπτο. Π.χ. για μια ταλάντωση με $T = 0,25$ sec, μέσα σε 1 sec "χωράν" ακριβώς 4 περίοδοι και έτσι

$v = 4$ κύκλοι/sec.

Μπορούμε να βρούμε την σχέση μεταξύ v και T από την απλή μέθοδο των τριών:

Δ. Κουτσάκης

Σε χρόνο T sec πραγματοποιείται 1 κύκλος

-"- 1 sec -"- v? κύκλοι

παίρνουμε: $\boxed{v = \frac{1}{T}}$ (4)

α) Έτσι πχ για $T = 0,2$ sec, $v = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5\ s^{-1}$

Η συχνότητα δηλαδή έχει μονάδες s^{-1}. Καμιά φορά γράφουμε και κύκλους/s αλλά βέβαια ο κύκλος δεν είναι μονάδα αλλά το γράφουμε για ευκολία για να μας θυμίζει την φυσική σημασία της συχνότητας. Το s^{-1} του δίνουμε το όνομα μιας άλλης μονάδας, το Hertz Hz, δηλαδή $1\ Hz = s^{-1}$

Αφού σε κάθε κύκλο το φ μεταβάλλε-
ται κατά 2π, τότε η συνολική μεταβο-
λή της ~~φάσ~~ φάσης φ ισούται με $5\times 2\pi = 10\pi$

Άρα το ω ισούται με $\omega = 5\times 2\pi \ \frac{rad}{s} = 10\pi \ \frac{rad}{s}$

βλέπουμε ότι οι μονάδες του ω είναι rad/s.

ο) Άλλωστε και από τον ορισμό της φάσης

$\varphi = \omega t$ παίρνουμε $\Delta\varphi = \omega \Delta t \Rightarrow$

$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ και εάν θέσουμε χρόνο Δt ίσο με μια περίοδο, την αντίστοιχη μεταβολή $\Delta\varphi = 2\pi$, έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

ο) Φυσική σημασία της σταθεράς φάση δ.

Θα εξετάσουμε τώρα την πιο γενική περίπτωση $\delta \neq 0$. Η κίνηση τότε περιγράφεται από την

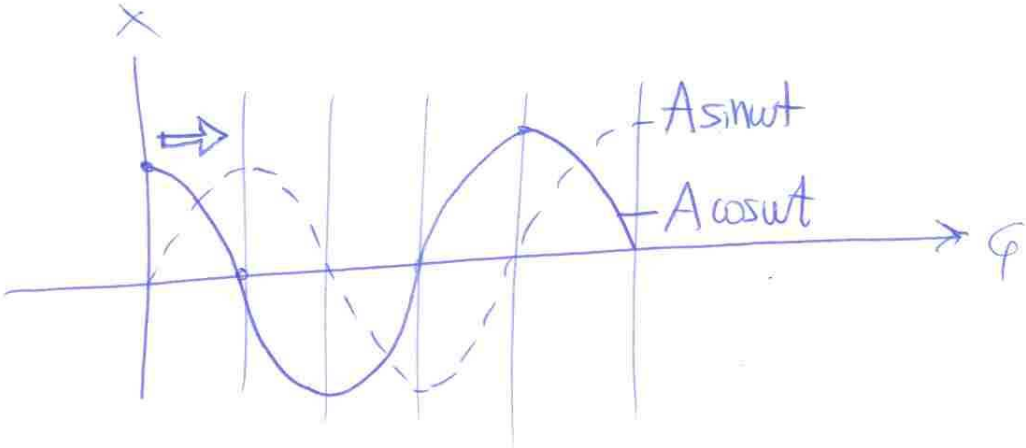
$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

Δ. Κουτσάφτης

Το δ δεν αλλάζει ποιοτικώς την κίνηση, αλλά μετατοπίζει την γραφ. παράσταση δεξιά-αριστερά. Πχ. για $\delta = -\pi/2$ παίρνουμε

$$x = A\cos(\omega t - \pi/2) = A\sin(\omega t)$$

Είναι δηλαδή σαν να μετατοπίσαμε την $A\cos\omega t$ δεξιά κατά $\Delta\varphi = \pi/2$:

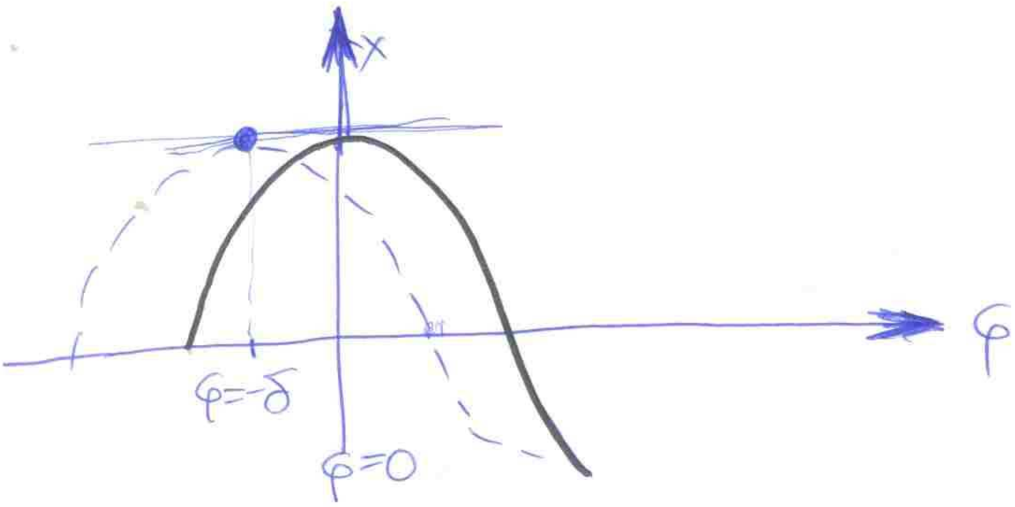


Δ. Κατσόγη

Όμοια για τυχαίο δ έχουμε

$$x = A\cos(\varphi + \delta)$$

συμπεραίνουμε ως εξής: Η $x = A\cos\varphi$ έχει μέγιστο $x = A$ στο $\varphi = 0$. Η αντίστοιχη $x = A\cos(\varphi + \delta)$ θα έχει μέγιστο για $\varphi + \delta = 0 \Rightarrow \varphi = -\delta$. Άρα η γρ. παράσταση έχει μετατοπισθεί αριστερά κατά $-\delta$:



Στην πράξη αποφεύγουμε να χρησιμοποιούμε την σταθερά δ γιατί εάν αυτό δεν είναι [illegible]. Εάν π.χ. καταλήξουμε σε μια λύση της μορφής

Προσοχή

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

αλλάζουμε την μεταβλητή χρόνου θέτοντας

$$\omega t + \delta = \omega t' \Rightarrow \quad t' = t + \delta/\omega$$

(δηλαδή μηδενίζουμε το ρολόι μας έτσι ώστε $\delta = 0$) για να έχουμε $x = A\cos(\omega t')$.