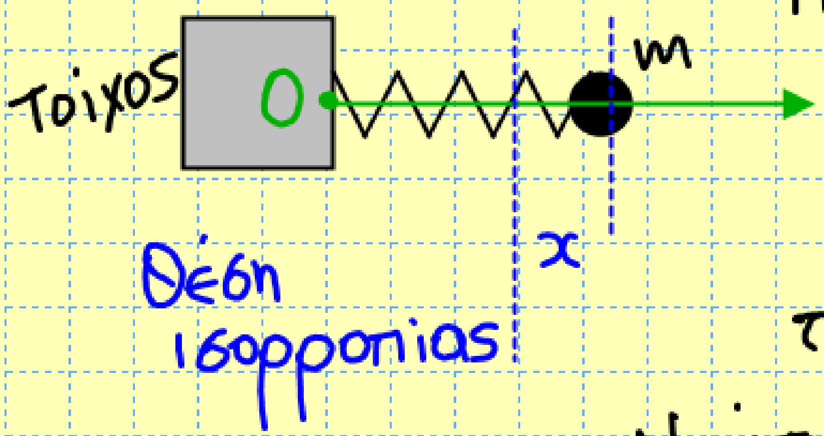
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Πολλά συστήματα στην φύση εκτελούν ταλαντώσεις όταν διαταραχτούν ελαφρώς. Π.χ. κλαδί δέντρου όταν φυσάει, τζάμι παραθύρου όταν περνάει από κοντά ένα βαρύ όχημα κ.ό.κ. Θα δούμε με δυο απλά παραδείγματα πως μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδο της ταλάντωσης ξεκινώντας από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα και μετά θα γενικεύσουμε για εκκρεμές τυχαίου σχήματος.

α) Μάζα m συνδεδεμένη σε ελατήριο σταθεράς k.

Ως γνωστόν, εαν απομακρύνουμε το ελατήριο κατά x από την θέση του ισορροπίας, εκτελεί ταλάντωση. Στη



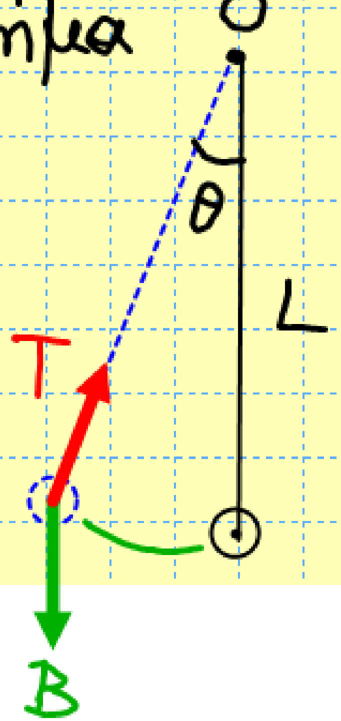
μάζα δρά μόνο μια δύναμη, η δύναμη επαναφοράς $F=-kx$ του ελατηρίου. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα $\Sigma F = ma$ δίνει $-kx = m x'' \Rightarrow$

$x'' = -\frac{k}{m} x$. Δοκιμάζουμε αρμονική ταλαντωτική λύση της μορφής $x = A \cos \omega t$ (για ευκολία παραλείπεται η αρχική φάση δ όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη διάλεξη). Αντικαθιστώντας έχουμε $-\cancel{A}\omega^2 \cancel{\cos}\omega t = -\frac{k}{m} \cancel{A} \cancel{\cos}\omega t$

ή $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Αφού $\omega = \frac{2\pi}{T}$ έχουμε $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Φυσική ερμηνεία του αποτελέσματος. Η περίοδος T είναι τόσο μεγαλύτερη (αργή ταλάντωση) όσο η μάζα m είναι μεγάλη (οπότε λόγω αδράνειας καθυστερεί το σύστημα) και όσο μικρότερο είναι το k (οπότε είναι ασθενές το ελατήριο).

ο) Μάζα m αναρτημένη σε κατακόρυφο νήμα μήκους L.



Ως γνωστόν εαν εκτρέψουμε τη μάζα κατά μια μικρή γωνία θ, τότε το σύστημα μάζα-νήμα εκτελεί περιστροφική ταλάντωση γύρω από το σημείο ανάρτησης Ο. Αφού πρόκειται για περιστροφική κίνηση, καταφεύγουμε στον νόμο $\Sigma\tau = I\alpha$. Αφού πρόκειται για σημειακή μάζα m, η ροπή αδράνειας I ισούται με mr^2 ή $I = mL^2$ αφού η απόσταση r από τον άξονα περιστροφής είναι ίση με το μήκος του νήματος. Η γωνιακή επιτάχυνση α ισούται με $\alpha = \theta''$. Στη μάζα δρουν δυο δυνάμεις, η τάση T του νήματος και το βάρος της $B = mg$. Η T δεν δημιουργεί ροπή αφού ο φορέας της περνάει από τον άξονα περιστροφής. Αντιθέτως το B δημιουργεί ροπή $\tau = -rF\sin\theta = -Lmg\sin\theta$. Το μείον έχει μπει γιατί η τ αντιτίθεται στην αύξηση της γωνίας. Εαν π.χ. πάρουμε ως θετική τη φορά $\circlearrowleft^{+}$ τότε στο προηγούμενο σχήμα η θ είναι προς τη θετική φορά ενώ η τ τείνει να στρέψει αντίθετα. Αντιθέτως όταν η μάζα είναι στη δεξιά μεριά της κατακορύφου, η θ είναι κατά την αρνητική φορά ενώ η τ προς τη θετική. Έτσι ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα δίνει $\tau = I\alpha \Rightarrow -\cancel{m}g\cancel{L}\sin\theta = \cancel{m}L^{\cancel{2}}\theta'' \Rightarrow$ $\Rightarrow \theta'' = -\frac{g}{L}\sin\theta$. Εαν δοκιμάσουμε την αρμονική ταλαντωτική συνάρτηση $\theta = \theta_0 \cos\omega t$ θα δούμε ότι αυτή η εξίσωση δεν λύνεται. Σε μικρές γωνίες όμως ισχύει $\sin\theta \simeq \theta$ εάν η θ είναι είναι σε rad (δοκιμάστε το σε μια αριθμομηχανή χειρός). Έτσι η παραπάνω εξίσωση γίνεται προσεγγιστικά $\ddot{\theta} \simeq -\frac{g}{L}\theta$ που τώρα μπορεί να λυθεί δοκιμάζοντας ως λύση την αρμονική ταλαντωτική συνάρτηση $\theta = \theta_0 \cos\omega t$. Παίρνουμε:

$$-\omega^2 \cancel{\theta_0} \cancel{\cos}\,\omega t \simeq -\frac{g}{L} \cancel{\theta_0} \cancel{\cos}\,\omega t \Rightarrow \omega^2 = -\frac{g}{L}$$

και επομένως

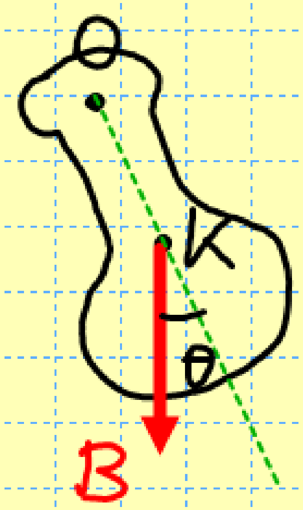
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Δηλαδή στο φυσικό εκκρεμές, η περίοδος της ταλάντωσης είναι τόσο μεγαλύτερη (αργή) όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος L. Στα ρολόγια τοίχου με εκκρεμές, το L ρυθμίζεται ώστε να έχουμε T = 1 sec. Αρκεί να θέσουμε $L = g/(2\pi)^2 \simeq 10/36 \simeq 0{,}3\,m$ δηλαδή περίπου 30 cm. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι το εκκρεμές εκτελεί αρμονική ταλάντωση μόνο για μικρά θ.

σ) Εκκρεμές τυχαίου σχήματος

Γνωρίζουμε από την καθημερινή μας εμπειρία ότι εάν αναρτήσουμε ένα οποιοδήποτε σώμα από ένα σημείο Ο έτσι ώστε να μπορεί να περιστραφεί ελεύθερα γύρω από αυτό, τότε το σώμα υπό την επίδραση της βαρύτητας εκτελεί αιωρήσεις όταν διεγερθεί ελαφρώς. Ποιά είναι η περίοδος αυτών των αιωρήσεων; Δίνονται η ροπή αδράνειας I του σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το Ο και είναι παράλληλος ως προς το έδαφος

Λύση: Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα τυχαίο στερεό σώμα που είναι αναρτημένο από το σημείο Ο



και μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από άξονα που διέρχεται από αυτό και που είναι κάθετος στην σελίδα. Το K είναι το κέντρο μάζας του σώματος. Είναι προφανές ότι όπως είναι σχεδιασμένο το σώμα, δεν βρίσκεται σε ισορροπία. Όσο το K δεν βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το O, το βάρος B του σώματος που δρα στο K δημιουργεί ροπή $\tau=-rB\sin\theta$ όπου r είναι η απόσταση OK. Το μείον έχει την έννοια που είχε στα προηγούμενα παραδείγματα δηλαδή μπαίνει επειδή το τ είναι αντίθετο του θ. Εαν δηλαδή διαλέξουμε τη θετική φορά ως (+↺) τότε στο προηγούμενο σχήμα $\theta>0$, το $\sin\theta>0$ (η συνάρτηση ημιτόνου έχει το ίδιο πρόσημο με το θ) ενώ η ροπή τείνει να στρέψει προς την αντίθετη φορά ↻ και άρα πρέπει να είναι αρνητική και για αυτό μπαίνει το μείον. Και βεβαίως αντίθετα όταν το σώμα περάσει στην απέναντι μεριά $\theta<0$, $\sin\theta<0$ και το μείον πολύ σωστά δίνει $\tau>0$ αφού η ροπή τείνει να επαναφέρει το $\vec{OK}$ στην κατακόρυφο. Αφού I είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως το O, τότε ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma\tau = I\alpha \Rightarrow \tau = I\alpha \Rightarrow -rB\sin\theta = I\theta'' \Rightarrow \theta'' = -\frac{rB}{I}\sin\theta$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, θέτουμε $\sin\theta \simeq \theta$ και $\theta = \theta_0 \cos\omega t$. Καταλήγουμε στην $\omega^2 = \frac{rB}{I}$ και άρα η περίοδος των ταλαντώσεων είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}$

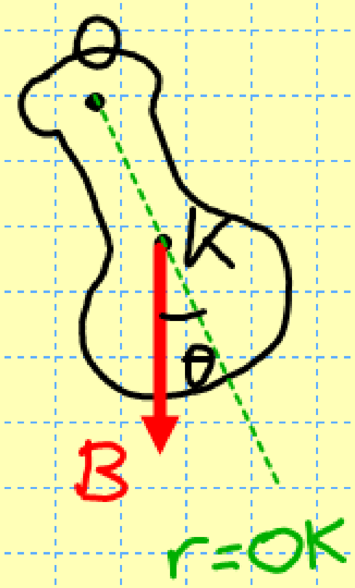
ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ.

Επανερχόμαστε στο παράδειγμα με το ελατήριο. Η δύναμη επαναφοράς είναι $F = -kx$ και αφού εξαρτάται μόνο από το x $\Rightarrow$ είναι διατηρητική (δες αντίστοιχο εδάφιο) $\Rightarrow$ προκύπτει από δυναμική ενέργεια $U(x)$ η οποία εξ' ορισμού είναι $U(x) = -\int F(x)\,dx = \frac{1}{2}kx^2$. Αφού η F είναι συντηρητική τότε η ολική μηχανική ενέργεια

κινητική + δυναμική $E=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}kx^2$ διατηρείται.
Για ταλαντωτή με $x=A\cos\omega t$ η ταχύτητα του u ισούται με $u=x'=-A\omega\sin\omega t$. Αφού το E: σταθερό, έχουμε την πολυτέλεια να το υπολογίσουμε σε όποια χρονική στιγμή θέλουμε. Διαλέγουμε $t=0$ για ευκολία όπου $x=A$ και $u=0$ και έχουμε $E=\frac{1}{2}kA^2$. Όπως είδαμε παραπάνω, το ω^2 του ελατηρίου ισούται με $\omega^2=k/m \Rightarrow$ $k=m\omega^2$ οπότε

Ενέργεια Ταλαντωτή $E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

A: πλάτος ταλάντωσης
ω: κυκλική συχνότητα
m: μάζα ταλαντωτή



Ποια είναι η αντίστοιχη έκφραση του εκκρεμούς; Αρκεί να βρούμε την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια. Για μικρά θ η ροπή ισούται με $\tau = -rB\sin\theta \simeq -rB\theta$. Το έργο στην περιστροφή για $\theta_1 \to \theta_2$ ισούται με $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta$. Η δυναμική ενέργεια είναι εξ' ορισμού μείον το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα δηλαδή $U(\theta) = -\int \tau \, d\theta = rB\int \theta \, d\theta = \frac{1}{2} rB\theta^2$

Η ολική μηχανική ενέργεια E είναι κινητική + δυναμική:

$E = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} rB\theta^2$ και $\theta = \theta_0 \cos\omega t$, $\omega = \theta' = -\omega\theta_0 \sin\omega t$.

Στο $t=0$ $E = \frac{1}{2} rB\theta_0^2$. Είδαμε παραπάνω ότι $\omega^2 = \frac{rB}{I} \Rightarrow$

$\Rightarrow rB = I\omega^2$ και τελικά

$$\boxed{\text{Ενέργεια περιστροφικού ταλαντωτή (εκκρεμές) για μικρά } \theta \qquad E=\frac{1}{2}I\omega^2\theta_0}$$

I: ροπή αδράνειας ως προς το σημείο αιώρησης

ω: κυκλική συχνότητα

θ_0: πλάτος ταλάντωσης (γωνία)