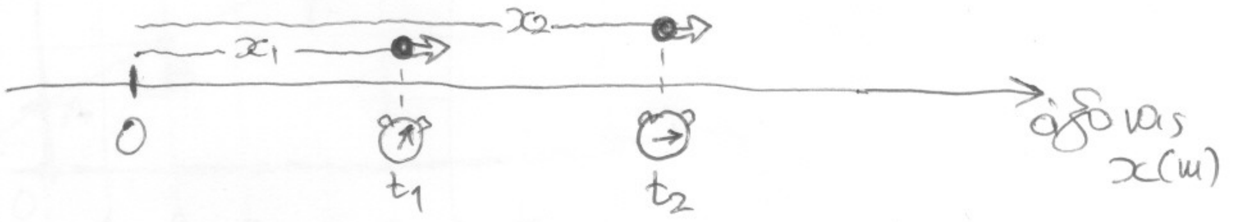
ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Εάν x είναι η απομάκρυνση ενός κινητού στη μια διάσταση, τότε έχουμε μάθει στο Λύκειο ότι η ταχύτητα του κινητού δίνεται από την έκφραση

$$U=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1)$$

όπου x_2 η απομάκρυνσή του κατά την χρον. στιγμή t_2

& x_1 η —"— —"— —"— —"— —"— t_1

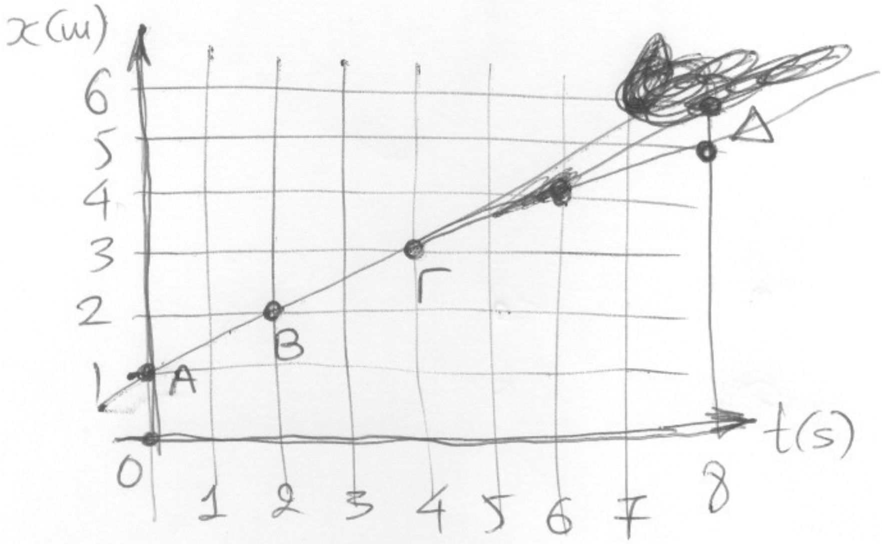


Συνήθως για ευκολία παίρνουμε $t_1=0$ όταν το κινητό βρίσκεται στην αρχή του άξονα x οπότε και $x_1=0$ και η (1) απλοποιείται σε

$$U=\frac{x}{t} \quad (2)$$

όπου για ευκολία παραλείπεται ο δείκτης "2" αφού πλέον δεν χρειάζεται

Ισχύει πάντα η σχέση 1; Απάντηση:
Όχι. Ισχύει ΜΟΝΟ για ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, όταν δηλαδή το κινητό σε ίσους χρόνους διανύει ίσα διαστήματα. Μια τέτοια περίπτωση φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα όπου ένας φοιτητής απεικόνισε την απομάκρυνση ενός κινητού x σε μέτρα συναρτήσει του χρόνου t σε sec:



Προφανώς το κινητό σε ίσους χρόνους διανύει ίσα διαστήματα. Π.χ. μεταξύ των σημείων A και B η διαφορά χρόνου είναι $2-0=2$ sec και το κινητό έχει διανύσει απόσταση $2-1=1$ m. Ομοίως όμως και μεταξύ των σημείων B και Γ η διαφορά χρόνου είναι $4-2=2$ sec αλλά και πάλι το διάστημα που διανύει το κινητό είναι $3-2=1$ m.

Η σχέση 1 μας δίνει για την κίνηση Α→Β

και Β→Γ:

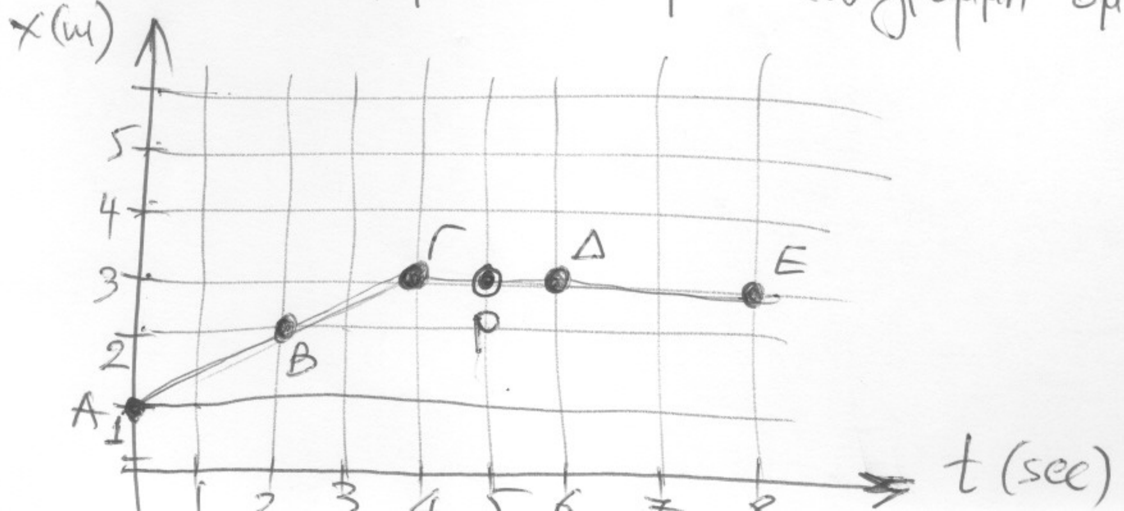
$$u_{AB} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2} \frac{m}{s}$$

$$u_{B\Gamma} = \frac{x_\Gamma - x_B}{t_\Gamma - t_B} = \frac{3-2}{4-2} = \frac{1}{2} \frac{m}{s}$$

Δηλαδή είναι σταθερή το οποίο είναι ένα χαρακτηριστικό της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης. Ομοίως εάν εξετάσουμε την κίνηση Γ→Δ όπου τα Δ και Γ βρίσκονται σχετικά σε μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ τους εν σχέσει με τα προηγούμενα δύο ζευγάρια παραπάνω, έχουμε

$$u_{\Gamma\Delta} = \frac{x_\Delta - x_\Gamma}{t_\Delta - t_\Gamma} = \frac{5-3}{8-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \frac{m}{s}$$

Ας εξετάσουμε τώρα την παρακάτω περίπτωση όπου η κίνηση είναι τμηματικώς μόνο ευθύγραμμη ομαλή



Προφανώς το κινητό κινείται ευθύγραμμα ομαλά στο τμήμα $A \to B \to \Gamma$ αλλά μετά το Γ σταματάει απότομα αφού το x δεν μεταβάλλεται άλλο και παραμένει σταθερό στο $x = 3$ m. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒΓ είναι το ίδιο όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα άρα μπορούμε να γράψουμε για την ταχύτητα

$$
\upsilon = \begin{cases} \frac{1}{2} \ m/s & \text{για } t < 4 \text{ sec} \\ 0 & \text{— " —} \quad t > 4 \text{ — " —} \end{cases}
$$

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα στο σημείο Ρ. Λογικό είναι να διαλέξουμε τα σημεία Γ και Δ που ισαπέχουν από το Ρ για να γράψουμε

$$
\upsilon = \frac{x_\Delta - x_\Gamma}{t_\Delta - t_\Gamma} = \frac{3-3}{6-4} = 0 \ \frac{m}{s}
$$

που είναι σωστό.

Εάν όμως αντ' αυτού, διαλέξαμε τα σημεία Ε και Β τα οποία επίσης ισαπέχουν από το P, θα βρίσκαμε:

$$υ = \frac{x_E - x_B}{t_E - t_B} = \frac{3-2}{8-2} = \frac{1}{6}\ \frac{m}{s}$$

που όπως είπαμε δεν είναι σωστό αφού για $t > 4s$ το κινητό ηρεμεί.

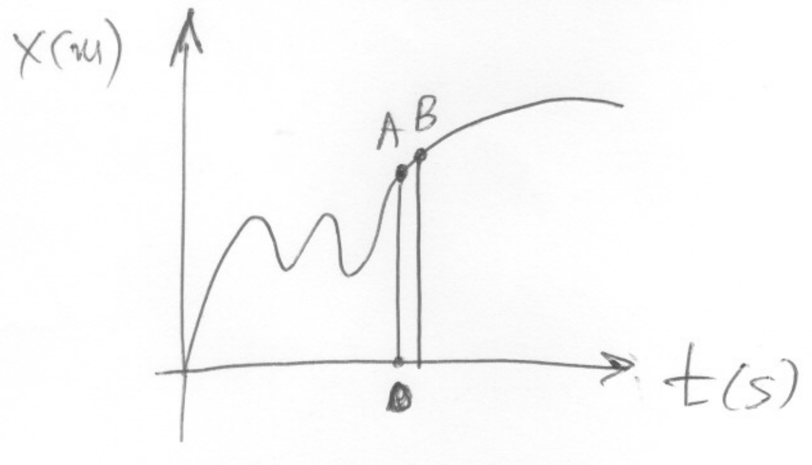
Άρα το συμπέρασμα είναι ότι η $υ = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ισχύει κ εδώ αρκεί να διαλέξαμε σημεία που βρίσκονται επάνω στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα με το σημείο που θέλαμε να μετρήσουμε την ταχύτητά του.

Τι γίνεται όμως όταν έχουμε μια καμπύλη; Μπορούμε πάντοτε να θεωρήσουμε την καμπύλη ως ένα σύνολο ευθύγραμμων τμημάτων, αρκεί τα τμήματα αυτά να είναι πολύ μικρά. Για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα, η μια από τις δύο καμπύλες έχει σχεδιασθεί με σύνολο μικρών ευθ. τμημάτων ενώ η άλλη με συνεχή τρόπο. Δίπλα-δίπλα μπορούμε να δούμε την διαφορά:

Σύνολο μικρών ευθυγ. τμημάτων

Συνεχόμενη

Άρα μπορούμε να πούμε ότι στην πιο γενική περίπτωση κίνησης, που το κινητό διαγράφει μια εντελώς τυχαία τροχιά όπως η παρακάτω, μπορούμε και πάλι να εφαρμόσουμε τη σχέση $u = \frac{x_A - x_B}{t_A - t_B}$ για να βρούμε την ταχύτητα ανάμεσα στο Α και Β

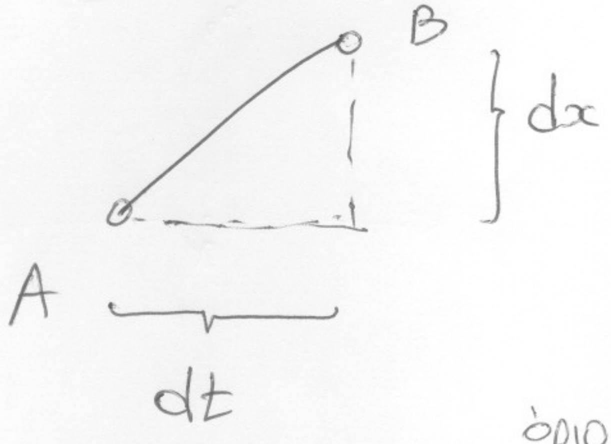


αρκεί τα Α και Β να είναι πολύ κοντά ώστε το ΑΒ να θεωρηθεί προσεγγιστικά ως ένα ευθύγραμμο τμήμα. Πόσο κοντά πρέπει να είναι τα Α και Β; Όσο πιο κοντά είναι, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση. Πρέπει δηλαδή το Α να τείνει στο Β. Εάν $\Delta t = t_B - t_A$ τότε μαθηματικώς από το εκφρά-

Τότε γράφουμε $Δt \to 0$. Έτσι λοιπόν η γνωστή μας σχέση $υ = \frac{Δx}{Δt}$ που ισχύει στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ΔΕΝ ισχύει γενικά αλλά πρέπει να αντικατασταθεί με την

$$υ = \lim_{Δt \to 0} \frac{Δx}{Δt}$$

Έτσι όταν το Α τείνει στο Β το τμήμα της καμπύλης ΑΒ τείνει σε ευθύγραμμο τμήμα.



Οι Φυσικοί δεν θέλουν ~~[illegible]~~ να κουβαλούν συνεχώς τον συμβολισμό του ορίου και ορίζουν το dt ως το όριο του Δt όταν αυτό τείνει στο μηδέν δηλαδή $dt = \lim_{Δt \to 0} Δt$

και ως dx το αντίστοιχο Δx της καμπύλης. Έτσι γράφουν για την ταχύτητα $υ = \frac{dx}{dt}$ όπου εννοείται ότι η ποσότητα στον παρανομαστή ες κατ' ανάγκη ~~[illegible]~~

αυτή στον αριθμητή) τείνει στο μηδέν. $\boxed{8}$

Το dt ονομάζεται "διαφορικό" του χρόνου και αντίστοιχα το dx "διαφορικό" της απομάκρυνσης x.

Από την άλλη μεριά, μπορούμε να γράψουμε για τους χρόνους t_A και t_B στα σημεία A και B:

$$t_B = t_A + \Delta t$$

Σε τυχαίες κινήσεις, το x είναι εν γένει μια συνάρτηση του t, δηλαδή $x = f(t)$ π.χ.

$x = A\cos\omega t$, $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ κ.ό.κ. Για τα σημεία x_A και x_B μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$x_A = f(t_A)$$

$$x_B = f(t_B) = f(t_A + \Delta t)$$

Έτσι ο ορισμός της ταχύτητας με την βοήθεια του ορίου γράφεται:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_B) - f(t_A)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_A + \Delta t) - f(t_A)}{\Delta t}$$

Αυτή όμως η έκφραση δεν είναι άλλη από την παράγωγο της $f(t)$ στο σημείο $t = t_A$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι στο σημείο Α η ταχύτητα ενός κινητού του οποίου η απομάκρυνσή του είναι μια συνάρτηση του χρόνου $x=f(t)$, ισούται με:

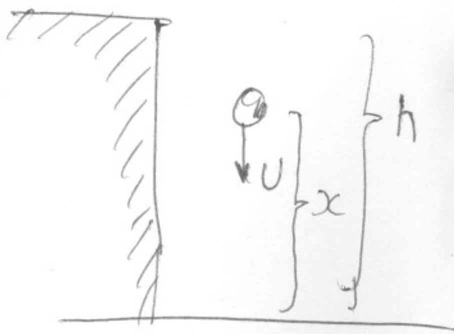
$$u_A = f'(t_A)$$

Άρα γενικεύοντας

ΤΑΧΥΤΗΤΑ $$\boxed{u = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(t)}$$

σ) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

~~Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση~~



Ελεύθερη πτώση: Εάν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει ελεύθερα από ύψος h, τότε γνωρίζουμε από το Λύκειο ότι το ύψος του σε κάθε στιγμή δίνεται από τον τύπο

$$x = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Για να βρούμε την ταχύτητα του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή, παραγωγίζουμε την παραπάνω έκφραση και έχουμε

$$u = f'(t) = -\frac{1}{\cancel{2}} g \cancel{2} t = -gt$$

Απλή
Αρμονική ταλάντωση.

Ως γνωστόν η αποτύπωση ενός σώματος στην απλή αρμονική ταλάντωση δίνεται από την

$x = A \sin \omega t$ όπου A: πλάτος ταλάντωσης
ω: κυκλ. συχνότητα -//-

Η ταχύτητα του κινητού είναι

$\dot{x} = f'(t) = A\omega \cos \omega t = v_0 \cos \omega t$ όπου $v_0 = A\omega$

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Η ταχύτητα όπως είδαμε είναι σταθερή v. Ποιά συνάρτηση $f(t)$ εαν την παραγωγίσουμε μας δίνει μια σταθερά; Η γραμμική συνάρτηση $f(t) = \lambda t$.
Παραγωγίζοντας έχουμε: $\dot{x} = f'(t) = \lambda$ Άρα το λ πρέπει να ισούται με την ταχύτητα και έτσι στην ευθύγραμμη ομαλή έχουμε $x = vt$

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

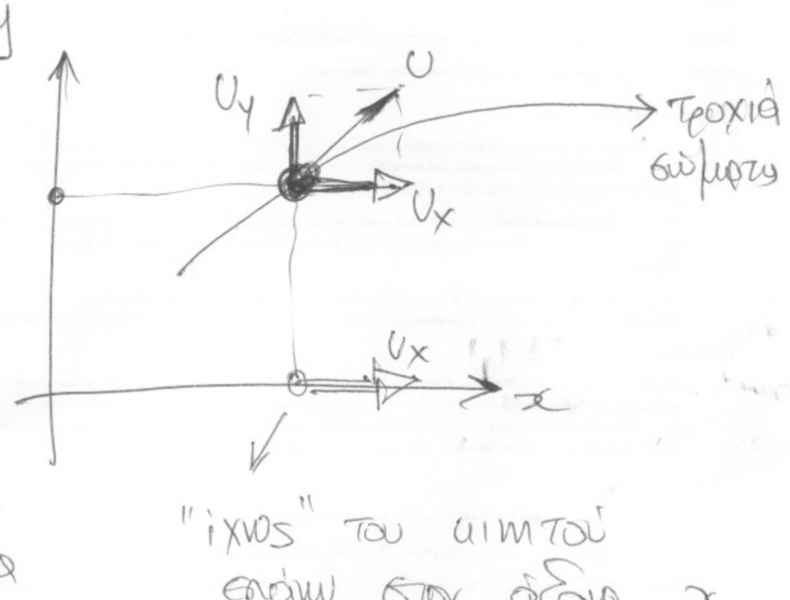
Στις δύο διαστάσεις το κινητό περιγράφεται από δύο συντεταγμένες x και y οι οποίες εν γένει είναι τυχαίες συναρτήσεις του χρόνου

$x = f(t)$
$y = g(t)$

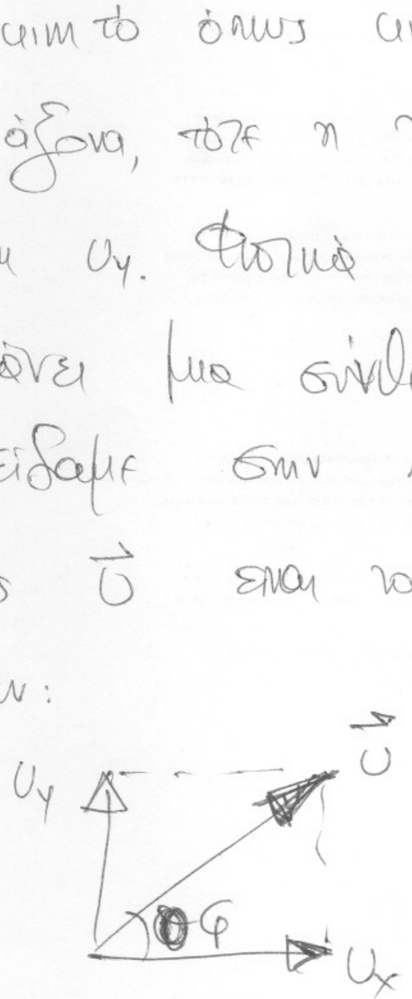
Όπως και προηγουμένως, ορίζουμε τις ταχύτητες v_x και v_y κατά μήκος των αξόνων x και y ως:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = g'(t)$$



Η v_x τώρα έχει την έννοια της ταχύτητας του "ίχνους" του κινητού επάνω στον x-άξονα. Ομοίως εάν φανταστούμε ότι το κινητό όπως κινείται αφήνει ένα "ίχνος" επάνω στον y άξονα, τότε η ταχύτητα αυτού του ίχνους στον άξονα y είναι v_y. Έτσι το κινητό σε κάθε χρονική στιγμή κάνει μια σύνθετη κίνηση, όπως η βάρκα στο ποτάμι που είδαμε στην προηγούμενη διάλεξη, και η ταχύτητά της $\vec{v}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο ταχυτήτων:



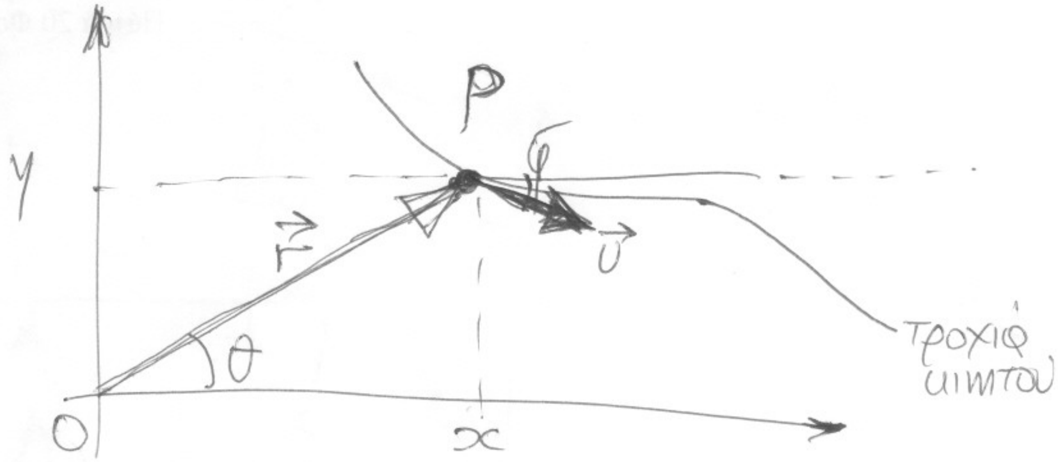
Εφόσον οι v_x και v_y είναι κάθετες, το μέτρο της $\vec{v}$ υπολογίζεται με απλό Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

και η γωνία φ από την $\tan\varphi = \dfrac{v_y}{v_x}$

Οι v_x και v_y δηλαδή έχουν την έννοια των συντεταγμένων του διανύσματος $\vec{v}$. (Η $\vec{v}$ είναι πάντοτε εφαπτομένη στην τροχιά του κινητού)

Εάν P είναι το σημείο που βρίσκεται επάνω στο κινητό (το οποίο θεωρείται σημειακό) και O είναι η αρχή των συντεταγμένων, τότε το διάνυσμα $\vec{r} = \vec{OP}$ ονομάζεται <u>διάνυσμα θέσης</u> ή <u>επιβατική ακτίνα</u> του κινητού.



Όπως είδαμε στα διανύσματα, εάν x και y είναι οι συντεταγμένες του σημείου P, τότε αυτές είναι και οι συντεταγμένες του διανύσματος θέσης $\vec{r}$, δηλαδή

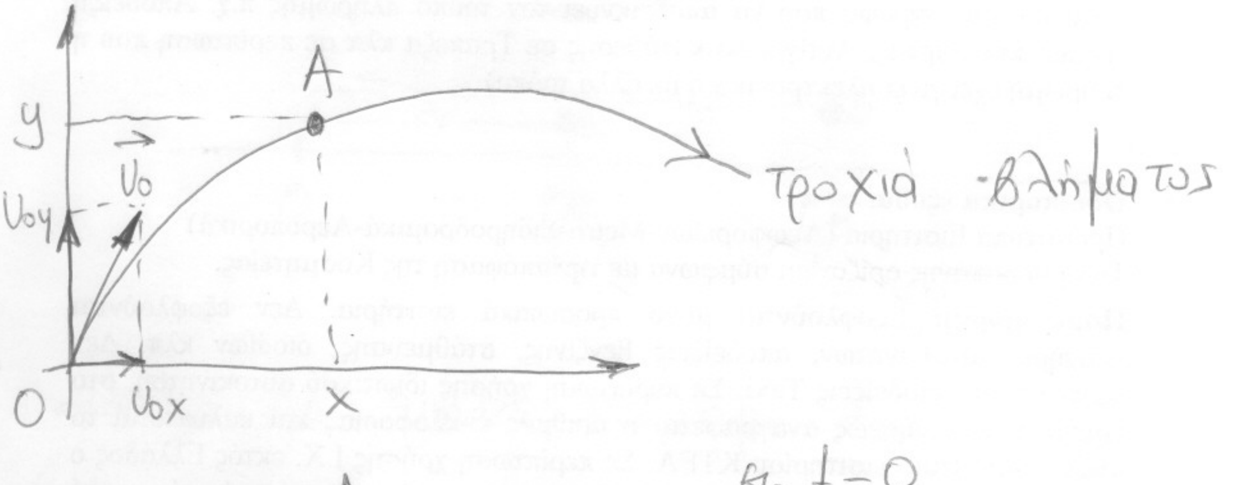
$$\vec{r} = \vec{OP} = (x, y).$$

Το μήκος του r ισούται με

$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$ και η γωνία θ δίνεται από την $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (Προσοχή μη την μπερδέψετε με την γωνία φ της ταχύτητας που δίνεται από την $\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x}$).

δ) Παραδείγματα Δισδιάστατης κίνησης:

Βολή σε βαρυτικό πεδίο με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$



Για ένα σώμα που εκτοξεύεται από το σημείο Ο (0,0) σε $t=0$ με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$, γνωρίζουμε από το Λύκειο ότι οι συντεταγμένες του x και y δίνονται σε τυχαία χρονική στιγμή t από τις

$$x = v_{0x}t$$
$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

(θα αποδειχθούν σε επόμενη διάλεξη)

Επομένως $f(t) = v_{0x} t$ και $g(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$

Για να βρούμε τις ταχύτητες v_x και v_y επάνω στους άξονες x και y, παραγωγίζουμε ως προς χρόνο:

$v_x = f'(t) = v_{0x}$: σταθερή

$v_y = g'(t) = v_{0y} - gt$: μειώνεται γραμμικά με το χρόνο.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι ως προς τον άξονα x, το "ίχνος" του A εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα v_{0x}. Αντίθετα η v_y μειώνεται γραμμικά με τον χρόνο και έτσι παίρνει διάφορες τιμές π.χ:

$$v_y = \begin{cases} v_{0y} & \text{στο } t = 0 \\ 0 & \text{—"— } t = v_{0y}/g \text{ (υψηλότερο σημείο)} \\ \text{αρνητική } < 0 & \text{για } t > v_{0y}/g \end{cases}$$

Έτσι το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v} = (v_{0x}, v_y)$ δεν παραμένει σταθερό ούτε κατά μέτρο ούτε κατά φορά αφού

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \underbrace{v_{0x}^2}_{\text{σταθερό}} + (\underbrace{v_{0y}}_{\text{σταθερό}} - \underbrace{gt}_{\text{συνάρτηση του χρόνου}})^2$$

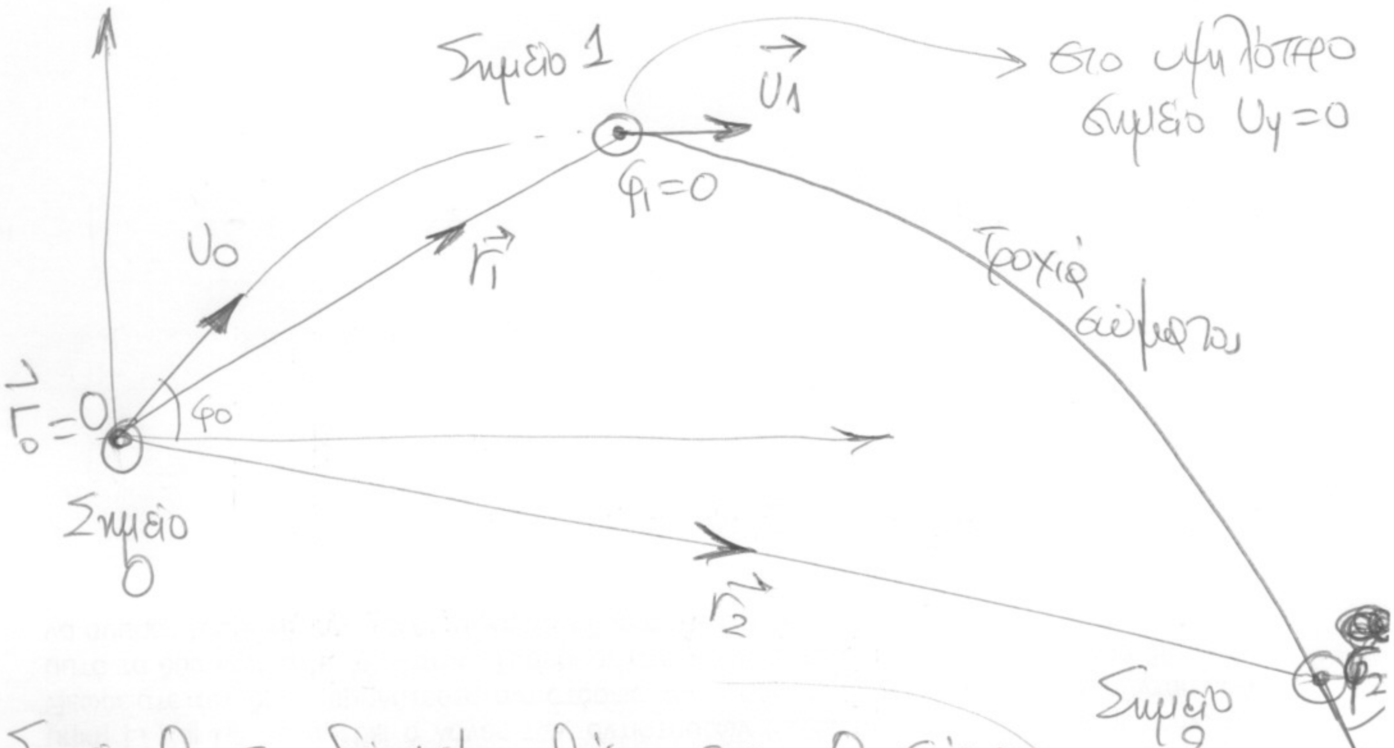
και

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_{y0} - gt}{v_{x0}}$$

$v_{y0} - gt$ → συνάρτηση του χρόνου

v_{x0} → σταθερό

Έτσι σε τρία διαφορ. σημεία της τροχιάς το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v}$ και της θέσης $\vec{r}$ φαίνονται παρακάτω:

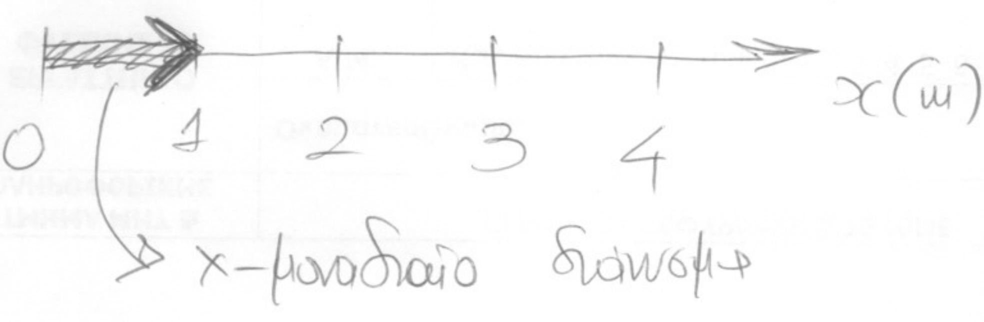


Στο Σημείο 0 το διάνυσμα θέσης είναι 0 ενώ η ταχύτητα είναι η αρχική $\vec{v}_0$. Στο σημείο 1 το σώμα έχει φτάσει στην υψηλότερη θέση και επομένως ως προς y σταματά δηλαδή $v_y=0$ και η ταχύτητα $\vec{v}_1$ είναι οριζόντια. Στο σημείο 2 η v_y έχει γίνει αρνητ. και έτσι η ταχύτητα $\vec{v}_2$ δείχνει προς τα κάτω.

ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Στην κίνηση των 2 και 3 διαστάσεων, τα μοναδιαία διανύσματα παίζουν σημαντικό ρόλο. Ο φοιτητής μπορεί να μην αντιληφθεί την σημασία τους μέχρι να χρησιμοποιηθούν σε μεταγενέστερες διαλέξεις αλλά καλό θα είναι να ορισθούν σε αυτό το σημείο. Η έννοια τους είναι πολύ απλή: Είναι η γενίκευση της "μονάδας" (δηλαδή του 1) στους αριθμούς. Όλοι οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν πολλαπλάσια της μονάδας. Το ίδιο ισχύει και με τα διανύσματα. Όλα τα διανύσματα παράγονται από τα μοναδιαία διανύσματα.

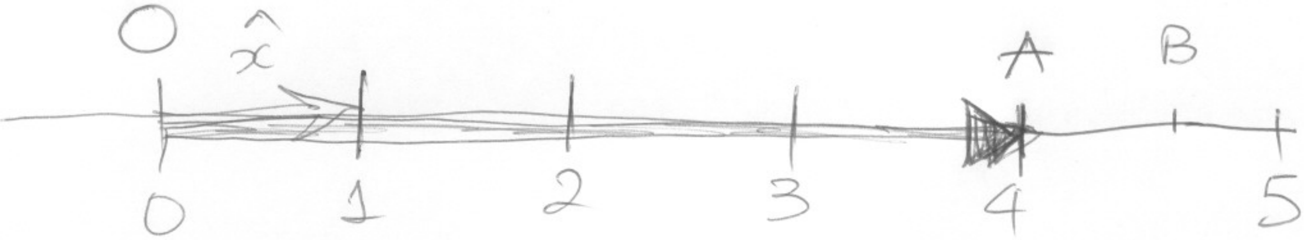
Έστω ο άξονας x. Το διάνυσμα με αρχή το O και πέρας το σημείο του άξονα με ένδειξη "1" ονομάζεται το x-μοναδιαίο διάνυσμα και συμβολίζεται με $\hat{x}$ (ή $\hat{e}_1$)



Ένα άλλο τυχαίο διάνυσμα, πχ το $\vec{OA}$ που έχει μέτρο $|\vec{OA}|=4$, μπορεί να γραφτεί ως πολλαπλάσιο του $\hat{x}$, ακριβώς όπως και στους αριθμούς:

$$\vec{OA} = 4\hat{x}$$

όπου το πολλαπλάσιο μπροστά από το $\hat{x}$ είναι το μέτρο του $\vec{OA}$:



Ομοίως και το διάνυσμα $\vec{OB}$ με μέτρο $|\vec{OB}|=4{,}5$ μπορεί να γραφτεί ως $\vec{OB} = |\vec{OB}|\hat{x} = 4{,}5\hat{x}$.
Με ανάλογο τρόπο κάθε διάνυσμα $\vec{O\Gamma}$ επάνω στον άξονα των y γράφεται ως $\vec{O\Gamma} = |\vec{O\Gamma}|\hat{y}$ όπου $\hat{y}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα y. Με την βοήθεια της πρόσθεσης διανυσμάτων, οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $\vec{r}$ μπορεί να γραφτεί ως $\vec{r} = \vec{OA} + \vec{O\Gamma}$. Αφού τα μέτρα των $\vec{OA}$ και $\vec{O\Gamma}$ είναι αντίστοιχα x και y (οι συντεταγμένες του $\vec{r}$) τότε:

$$\boxed{\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}}$$