Δ. Κουζούδης

α) ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Όπως ξέρουμε από την Μηχανική υπάρχουν 2 είδη δυνάμεις, οι <u>συντηρητικές</u> και οι <u>μη συντηρητικές</u>. Στις συντηρητικές το έργο τους ΔΕΝ εξαρτάται από την διαδρομή αλλά μόνο από την αρχική και την τελική θέση. Στην Μηχανική <u>πάντοτε</u> μπορούμε να γράψουμε

$\Delta K = W$ όπου K η κινητ. ενέργεια και W το έργο. Η μεταβολή δηλαδή της κινητ. ενέργειας ενός σώματος λόγω επίδρασης κάποιας δύναμης ισούται με το έργο αυτής της δύναμης. Όπως θα δούμε παρακάτω αναλυτικά, για τις συντηρητικές δυνάμεις <u>και μόνο</u> μπορούμε να γράψουμε το έργο ως την διαφορά μιας συνάρτησης U που ονομάζεται δυναμ. ενέργεια και εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες (και όχι από την ταχύτητα ή τον χρόνο) ως $W = -\Delta U$. Έτσι η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta(K+U) = 0 \Rightarrow$$

$E = K + U =$ σταθερά, διατηρείται

E: μηχανική ενέργεια

②

Συνοπτικά θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε αυτό το λογικό διάγραμμα:

$\Delta K = W$

ΙΣΧΥΕΙ ΠΑΝΤΑ

Εξαρτάται το W από την διαδρομή $A \to B$;

ΝΑΙ

$\vec{F}$: μη συντηρητική

Παραμένεις στο $\Delta K = W$

όπου $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$

ΟΧΙ

$\vec{F}$: συντηρητική

Υπάρχει συνάρτηση συντεταγμένων U τέτοια ώστε $W_{AB} = -\Delta U = U_A - U_B$

$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow$

$K_B - K_A + U_B - U_A = 0 \Rightarrow$

$K_A + U_A = K_B + U_B$

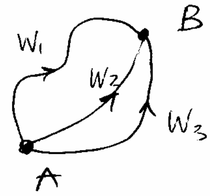
$E_A = E_B$

Χ. Κοζούκης

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ

α) ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Είδαμε παραπάνω ότι το έργο των συντηρητικών δυνάμεων δεν εξαρτάται από την διαδρομή αλλά μόνο από την αρχική και την τελική θέση. Έτσι οι τρεις παρακάτω διαδρομές θα έχουν το ίδιο έργο εαν βρισκόμαστε μέσα σε πεδίο συντηρητικής δύναμης. Δηλαδή $W_1 = W_2 = W_3$.



Λογικό είναι επομένως να ορίσουμε μια συνάρτηση U η οποία να εξαρτάται μόνο από την θέση στο χώρο και να παίρνει τιμές U_A στο A και U_B στο σημείο B, και να γράφουμε

$$W_1 = W_2 = W_3 = U_A - U_B$$

Έτσι μαθηματικώς εξασφαλίζουμε ότι το έργο εξαρτάται μόνο από το σημείο B και το σημείο A. Έτσι γράφουμε για συντηρητική δύναμη

$$W_{AB} = U_A - U_B$$

έργο $A \to B$ δυναμική ενέργεια

Η συνάρτηση αυτή λέγεται δυναμ. ενέργεια.

Σημείωση: Το $U_A - U_B$ ισούται με $-\Delta U$ γιατί όταν γράφουμε

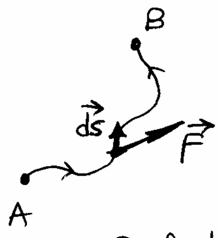
Δ. ΚΟΤΖΟΥΔΗΣ

"Δ" εννοούμε τελική – αρχική θέση.

ο) Οι δυνάμεις του ηλεκτρισμού είναι συντηρητικές.

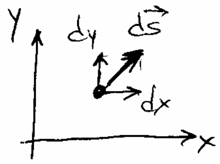
ο) Εάν εκφράσουμε το έργο συναρτήσει της δύναμης τότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}$$



όπου $d\vec{s}$ το διάνυσμα του στοιχειώδες μήκους, βρίσκεται πάνω στην διαδρομή που ακολουθούμε και έχει μονάδες μήκους.

Στις καρτεσιανές συντεταγμένες το $d\vec{s}$ έχει συνιστώσες dx και dy (παίρνω 2 διαστάσεις για απλότητα) γράφεται δηλαδή ως



$d\vec{s} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}$ $\quad$ $\hat{x},\hat{y}$: μοναδιαία διανύσματα (επίσης γνωστά και ως $\hat{i},\hat{j}$).

Ομοίως μπορούμε να γράψουμε και την δύναμη συναρτήσει των συνιστωσών της F_x και F_y ως

$\vec{F} = F_x\,\hat{x} + F_y\,\hat{y}$ και έτσι

$\vec{F}\cdot d\vec{s} = F_x\,dx + F_y\,dy$ και

$$U_A - U_B = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy\right)$$

Το ολοκλήρωμα είναι πάνω σε μια (οποιαδήποτε) διαδρομή που ενώνει τα Α και Β.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Όπως είπαμε η U εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες $\vec{x}$, έτσι $U_A = U(\vec{x}_A)$ και $U_B = U(\vec{x}_B)$ έτσι

$$U(\vec{x}_A) - U(\vec{x}_B) = \int_A^B (F_x dx + F_y dy)$$

Εάν λύσουμε αντίστροφα (δες διανυσματική ανάλυση) τότε παίρνουμε

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{και} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

Δηλαδή εάν γνωρίζουμε την συνάρτηση του δυναμικού συναρτήσει των συντεταγμένων τότε υπολογίζουμε την δύναμη από τις μερικές παραγώγους του δυναμικού.

α) Παραδείγματα:

Δυναμ. ενέργεια βαρύτητας $U = mgy$ τότε

$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ $\quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -mg$ η δύναμη βαρύτητας

(Το μείον είναι σωστό γιατί έχει κατεύθυνση προς το $-\hat{y}$).

β) Δυναμ. ενέργεια ελατηρίου $U = \frac{1}{2}kx^2$

$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$ δύναμη ελατηρίου

$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0$.

Χ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

α) Δισδιάστατο παράδειγμα.

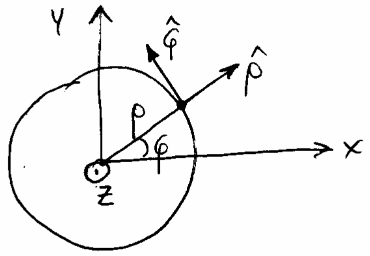
Έστω ότι $U = \alpha x \cdot y$ τότε

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha y$$ και

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\alpha x$$

β) Στις 3 διαστάσεις έχουμε και $3^{η}$ συνιστώσα $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

γ) Κυλινδρικές συντεταγμένες.



Στις κυλινδρικές συντεταγμένες αντί των x, y, z χρησιμοποιούμε τα ρ, φ, z (το z είναι το ίδιο, ρ είναι η ακτίνα και φ η γωνία από τον άξονα x με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού).

Τα αντίστοιχα μοναδιαία είναι τα $\hat{\rho}$, κατά την διεύθυνση της ακτίνας, το $\hat{\varphi}$ εφαπτόμενο στην τροχιά, και το $\hat{z}$ όπως προηγουμένως, κάθετο στα $\hat{x}$ και $\hat{y}$ (έξω από την σελίδα).

Αναλύουμε τώρα την δύναμη $\vec{F}$ σε τρεις συνιστώσες F_ρ, F_φ, F_z παράλληλες στο τρισορθογώνιο σύστημα

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

$\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$. Τότε εάν η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση των ρ, φ και z, δηλαδή $U = U(\rho, \varphi, z)$ τότε οι συνιστώσες της δύναμης δίνονται από τις

$$F_\rho = -\frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad F_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

δ) Παράδειγμα:

Εάν $U(\rho, \varphi, z) = \alpha \dfrac{\cos 2\varphi \cdot z}{\rho}$ τότε:

$$F_\rho = -\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\alpha \cdot \cos 2\varphi \cdot z}{\rho^2} \qquad F_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{2\alpha \sin 2\varphi \, z}{\rho^2}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\alpha \cos 2\varphi}{\rho}$$

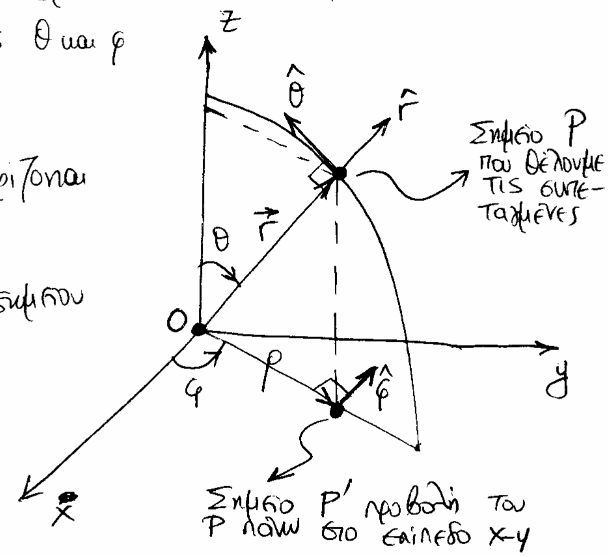
ε) Σφαιρικές συντεταγμένες στο σημείο P:

Χρησιμοποιούμε δύο γωνίες θ και φ και την ακτίνα r.

Οι συντεταγμένες αυτές ορίζονται ως εξής:

$\vec{r}$: η απόσταση του σημείου P από την αρχή των αξόνων O

θ: η γωνία που σχηματίζει το $\vec{r}$ με τον άξονα z



Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

φ: Η γωνία που σχηματίζει η προβολή ΟΡ' του ΟΡ με τον άξονα x. (Την προβολή ΟΡ' πάνω στο επίπεδο x-y μπορούμε να την περιγράψουμε με κυλινδρικές συντεταγμένες με ακτίνα ρ και γωνία φ).

Τα αντίστοιχα μοναδιαία είναι το $\hat{r}$ (παράλληλο με την ακτίνα) $\hat{\theta}$ (εφαπτόμενο στην τροχιά που διαγράφουμε εάν κρατήσουμε σταθερά τα r και φ και μεταβάλλουμε το θ) και $\hat{\varphi}$ (εφαπτόμενο στην τροχιά που διαγράφουμε εάν κρατήσουμε r, θ σταθερά και μεταβάλλουμε το φ).

ο) Συναρτήσει των σφαιρικών συντεταγμένων η $\vec{F}$ δίνεται από τις

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ