ΣΕΛ 1

α) ΔΥΝΑΜΙΚΟ.

Όπως είδαμε εάν σε μια περιοχή του χώρου υπάρχει ηλεκτρ. πεδίο $\vec{E}$ τότε εάν φέρουμε ένα δοκιμαστικό σημειακό φορτίο q στον χώρο του $\vec{E}$ τότε θα ασκηθεί μια δύναμη $\vec{F}=q\vec{E}$ στο δοκιμαστικό φορτίο. Η δύναμη αυτή του πεδίου παράγει έργο $W_{AB}=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}$ κατά την μετακίνηση του φορτίου $A \rightarrow B$. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος μεταβάλλεται κατά

$$U_A - U_B = W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}. \quad (1)$$

Η ένταση του πεδίου $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$ είναι ανεξάρτητη του μεγέθους του δοκιμαστικού φορτίου q και εξαρτάται μόνο από τα χαρακτηριστικά του πεδίου. Ομοίως ορίζουμε και μια νέα ποσότητα, <u>το δυναμικό V</u> το οποίο ισούται με την δυναμική ενέργεια U δια το φορτίο q. Δηλαδή

$$V=\frac{U}{q}$$

Το δυναμικό δεν εξαρτάται από το q αλλά από τα χαρακτηριστικά του πεδίου και μόνο. Διαιρώντας την (1) με q παίρνουμε

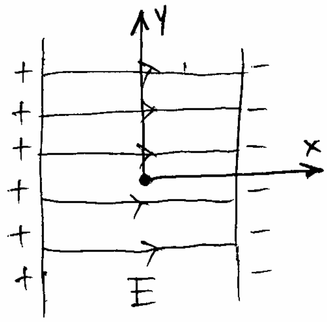
$$V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Η αναλογία $U \leftrightarrow \vec{F}$ δηλαδή (Σελ 2)
έχει γίνει $V \leftrightarrow \vec{E}$. Έτσι εάν γνωρίζουμε το δυναμικό ως συνάρτηση των συντεταγμένων x, y, z τότε μπορούμε να βρούμε τις συνιστώσες του $\vec{E}$ ως:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (2)$$

α) Παράδειγμα:



Γνωρίζουμε ότι ανάμεσα στις επίπεδες πλάκες ενός πυκνωτή το $\vec{E}$ είναι σταθερό.
Έτσι $E_x = E$: σταθερό
$E_y = E_z = 0$.
Από την (2) έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x = -E \quad \text{ολοκληρώνοντας} \quad V = -Ex + C$$

Επειδή η παράγωγος είναι μερική, η σταθερά δεν είναι ακριβώς απόλυτη σταθερά, αλλά σταθερά ως προς x. Μπορεί όμως να γένει να εξαρτάται από το y και το z δηλαδή $C = C(y,z)$ και έτσι

$$V = -Ex + c(y,z)$$ (παραγώγιση ως προς $\partial/\partial x$ μηδενίζει αυτήν την σταθερά).

Εάν τώρα παραγωγίζουμε ως προς τις άλλες δύο μεταβλητές έχουμε:

Σελ 3

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = E_y \Rightarrow -\frac{\partial c}{\partial y} = 0$$

Άρα η c δεν εξαρτάται από το y

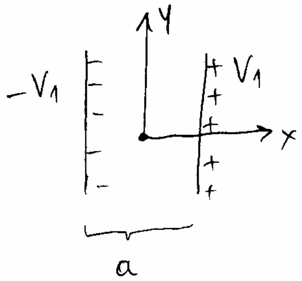
ομοίως

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = E_z \Rightarrow -\frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

δεν εξαρτάται ούτε από το z

Άρα στην συγκεκριμένη περίπτωση η c είναι απόλυτη σταθερά. Έτσι $V = -Ex + c$. Για να βρούμε την c ~~ξ~~ το E πρέπει να μας έχει δοθεί η τιμή του δυναμικού πάνω στις πλάκες του πυκνωτή και η απόσταση μεταξύ τους. Π.χ.:

Δ. Κουζούδης



Για $x = -a/2$ $\quad V(x) = -V_1 \Rightarrow$

$$+E\frac{a}{2} + c = -V_1$$

Για $x = +a/2$ $\quad V(x) = +V_1 \Rightarrow$

$$-E\frac{a}{2} + c = V_1$$

Λύνοντας αυτές τις δύο έχουμε $c = 0$ και $E = \frac{-2V_1}{d}$

Το μείον (-) είναι γιατί το $\vec{E}$ είναι προς τα αριστερά.

Η διαφορά δυναμικού των πλακών είναι

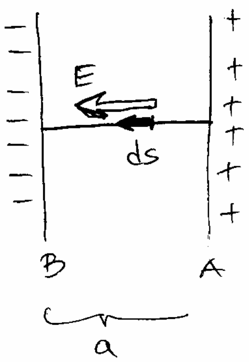
$\Delta V = V_1 - (-V_1) = 2V_1$ και έτσι παίρνουμε την γνωστή έκφραση του E του πυκνωτή:

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

από τον (+) προς τον (-) πόλο.

Σελ 4

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$ πηγαίνοντας από τον θετικό πόλο (+) Α στον αρνητικό (−) Β μέσω μιας ευθύγραμμης διαδρομής:



$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\, d\vec{s} = \int_A^B E ds =$$

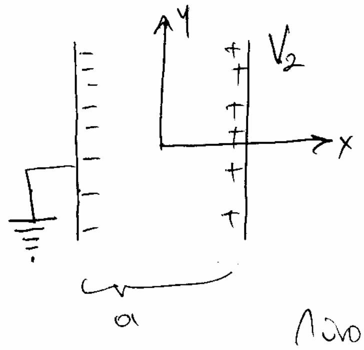
$$= E\int_A^B ds = Ea$$

Το E βγήκε έξω ολοκληρώματος γιατί είναι σταθερό. Έτσι

$$\Delta V = Ea \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{a}$$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

δ) Εάν κρατήσουμε γειωμένη την μια πλάκα και την άλλη την φέρουμε σε δυναμικό V_2 τότε η σταθερά c είναι διαφορετική:



$$V(x) = -Ex + c$$

Για $x = a/2$ $V(x) = V_2 \Rightarrow$

$$-E\frac{a}{2} + c = V_2$$

Για $x = -a/2$ $V(x) = 0 \Rightarrow$

$$E\frac{a}{2} + c = 0$$

Λύνοντας $c = \frac{V_2}{2}$ και $E = -\frac{V_2}{a}$

Αφού $\Delta V = V_2 - 0 = V_2$ και πάλι το E δίνεται από την γνωστή σχέση $E = \frac{\Delta V}{a}$

Σελ 5

α) Δυναμικό Coulomb. Το δυναμικό ενός σημειακού φορτίου δίνεται από την $V = k\frac{q}{r}$ άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες. Μαθηματικώς θα γράψουμε $V(r,\theta,\varphi) = k\frac{q}{r}$ όπου βέβαια δεν υπάρχει εξάρτηση από τις θ και φ.

Οι Εξ. 2 σε σφαιρικές συντεταγμένες γίνονται

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = k\frac{q}{r^2}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

: Το γνωστό ηλ. πεδίο σημ. φορτίου

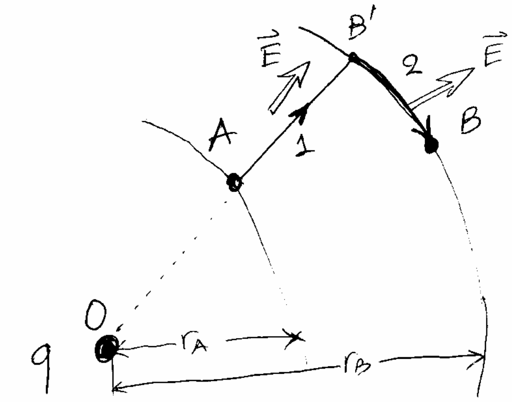
Άρα το $\vec{E}$ έχει μόνο $\hat{r}$ συνιστώσα και διανυσματικώς γράφεται $\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$.

β) Αντίστροφα εάν μου δινόταν το $\vec{E}$ και μου ζητούσαν την διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B χρησιμοποιώ την

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = kq\int_A^B \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\vec{s}$$

Το πλεονέκτημα των συντηρητικών πεδίων είναι ότι μπορώ να διαλέξω οποιαδήποτε διαδρομή $A \to B$ (το ηλ. πεδίο είναι συντηρητικό) και έτσι διαλέγω την ευκολότερη:

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ



Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Έστω δύο σημεία που βρίσκονται πάνω σε δύο σφαίρες με ακτίνες r_A και r_B αντίστοιχα και κοινό κέντρο το φορτίο q. Διαλέγω ως διαδρομή $A \to B$ την $AB'B$, δηλαδή αρχικά κινούμαι κατά μήκος της ακτίνας AB' μέχρι την εξωτερική σφαίρα, και μετά κινούμαι πάνω στην σφαίρα σε οποιαδήποτε διαδρομή από το B' στο B. Έτσι

$$V_A - V_B = \int_A^{B'} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{B'}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

όμως πάνω στην $B'B$ το $\vec{E}$ είναι κάθετο στην διαδρομή (και σε όλη την σφαίρα) $\Rightarrow$ το ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Αντίστροφα στην AB' το $\vec{E}$ είναι παράλληλο της διαδρομής και $\vec{E}\cdot d\vec{s} = E\,ds$ και το ds είναι το dr, η μεταβολή του μήκους της ακτίνας. Έτσι

$$V_A - V_B = \int_A^{B'} E\,dr = \int_A^{B'} \frac{kq}{r^2}\,dr = \left[kq\,\frac{-1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

Ή

Σελ 7

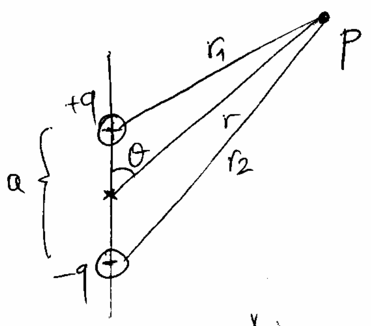
$V_A - V_B = kq\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$

Απ' το οποίο βέβαια συνάγεται ότι η έκφραση του δυναμικού είναι $V = k\frac{q}{r} + C$ όπου C μια αυθαίρετη σταθερά. Παίρνοντας ως σύμβαση $V \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ τότε $C=0$ και έτσι $V = k\frac{q}{r}$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

σ) Δυναμικό διπόλου.

Το δίπολο είναι ένα σύστημα δύο ίσων και αντίθετων σημειακών φορτίων $\pm q$ σε απόσταση α μεταξύ τους: Εάν τα τοποθετήσουμε στον άξονα z ποια είναι η έκφραση του V σε σφαιρικές συντεταγμένες στο σημείο P;



Λόγω του +q το δυναμικό στο σημείο P είναι

$V_1 = k\frac{q}{r_1}$

Ομοίως λόγω του −q

$V_2 = k\frac{-q}{r_2}$

Από την αρχή της επαλληλίας

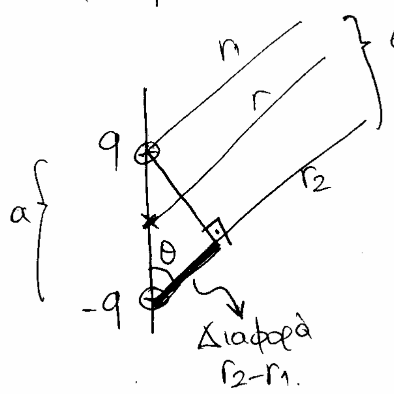
$$V = V_1 + V_2 = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = kq\,\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$$

(Θυμηθείτε ότι $V = \frac{U}{q}$ και αφού οι δυναμ. ενέργειες προστίθενται άρα προστίθενται και τα δυναμικά.)

Σελ 8

Από τον νόμο των συνημιτόνων μπορούμε να εκφράσουμε τα r_1 και r_2 συναρτήσει των r, θ και a αλλά οι εκφράσεις που προκύπτουν είναι σχετικά πολύπλοκες. Μια πιο εύχρηστη έκφραση προκύπτει εάν θεωρήσουμε ότι $r \gg a$.

Τότε τα r_1 και r_2 είναι περίπου ίσα με r και μοιάζουν να είναι παράλληλα στο r:



Φέρουμε μια κάθετη από το φορτίο q προς την r_2. Το μικρό κομμάτι μέσα στο τρίγωνο τότε ισούται με την διαφορά r_2-r_1. Με την βοήθεια της τριγωνομετρίας $r_2-r_1=a\cos\theta$ Έτσι

$$V = kq\,\frac{r_2-r_1}{r_2 r_1} \simeq kq\,\frac{a\cos\theta}{r^2}$$

Συγκρίνοντας με το δυναμικό $V=k\frac{q}{r}$ ενός μονοπόλου (ενός φορτίου) βλέπουμε ότι α) τώρα έχουμε και εξάρτηση από την γωνία θ και β) η εξάρτηση από το r είναι r^{-2} αντί για r^{-1}.

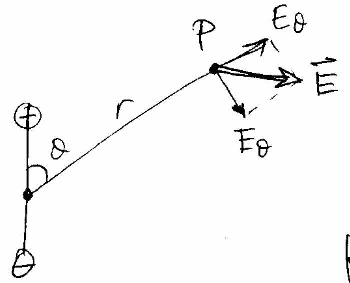
Σελ 9

ο) Να βρεθούν οι συνιστώσες του $\vec{E}$ ενός ηλεκτρικού διπόλου.

<u>Λύση</u> Στις σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -kqa\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) = 2kqa\frac{\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -kqa\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) = kqa\frac{\sin\theta}{r^3}$$



& $E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$

Δηλαδή σε αντίθεση με το μονόπολο, το $\vec{E}$ δεν βρίσκεται εν γένει πάνω στην ευθεία που ενώνει το μονόπολο με το υπό εξέταση σημείο P

Δ. Κουζούδης