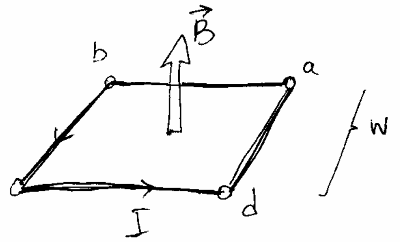
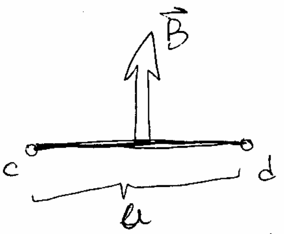
α) Ρευματοφόρο πλαίσιο μέσα σε ομοιογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Να βρεθεί η δύναμη και η ροπή πάνω στο πλαίσιο εάν αυτό έχει διαστάσεις $\ell \times w$ και διαρρέεται από ρεύμα I:

Λύση: Θεωρήστε αρχικά το πλαίσιο κάθετο στο $\vec{B}$:



3-D



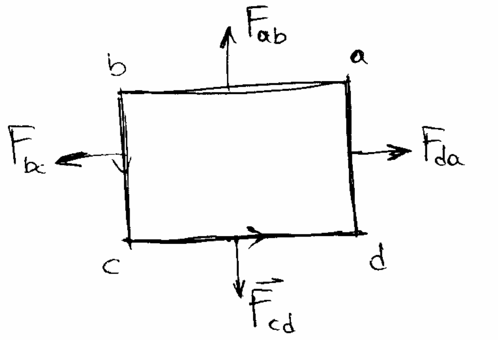
ΠΛΑΓΙΑ ΟΨΗ

Όπως είδαμε η δύναμη σε ένα ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ είναι

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$$

όπου είναι ένα διάνυσμα παράλληλο με τον αγωγό με μέτρο ίσο με το μήκος του ℓ. Η $\vec{F}$ είναι κάθετη και στο $\vec{\ell}$ και στο $\vec{B}$ (σύμφωνα με τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου). Αφού το $\vec{B}$ είναι κάθετο στο επίπεδο του πλαισίου τότε η $\vec{F}$ θα ανήκει στο επίπεδο αυτό. Έτσι οι δυνάμεις όπως φαίνονται στην κάτοψη είναι:

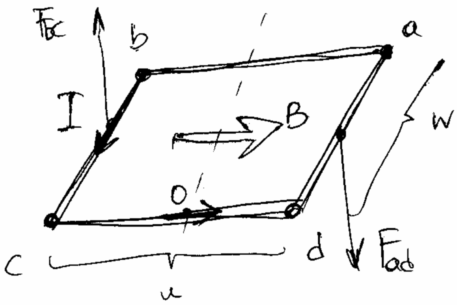
Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ



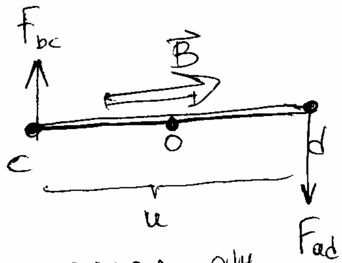
ΚΑΤΟΨΗ

Οι δυνάμεις ανά δύο είναι ίσες και αντίθετες. Άρα οι δυνάμεις δεν παράγουν συνολική δύναμη αλλά ούτε και συνολική ροπή οπότε το σύστημα αυτό παραμένει στην θέση του.

✓ Τώρα θεωρήστε το $\vec{B}$ παράλληλο προς το επίπεδο του πλαισίου, έστω $\vec{B} \parallel cd$ και ab:



3-D



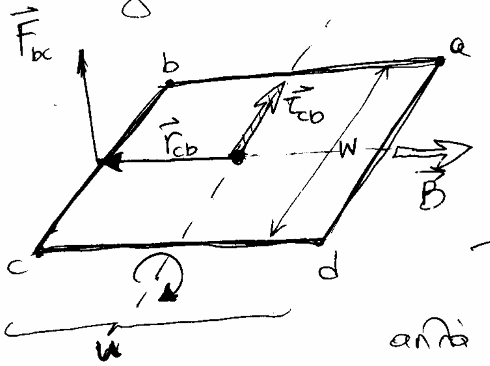
ΠΛΑΓΙΑ ΟΨΗ

Τώρα επειδή το $\vec{l} \parallel \vec{B}$ στις πλευρές ab και cd έχουμε $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} = 0$. Επομένως υπάρχουν δυνάμεις μόνο στις πλευρές bc και da όπως φαίνονται στην πλάγια όψη. Οι δύο αυτές δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες και έτσι δίνουν συνολική δύναμη μηδέν.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Παρόλα αυτά αυτές οι δυο μας τείνουν να περιστρέψουν το πλαίσιο ως προς άξονα που περνάει από το O. Εάν θυμηθούμε ότι η ροπή μιας δύναμης ως προς ένα άξονα ορίζεται ως

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ όπου $\vec{r}$ η απόσταση της $\vec{F}$ από τον άξονα τότε έχουμε:



$\vec{\tau}_{cb} = \vec{r}_{cb} \times \vec{F}_{bc}$

Αφού το $\vec{r}_{cb}$ και το $\vec{F}_{bc}$ είναι κάθετα μεταξύ τους τότε το μέτρο του $\vec{\tau}_{cb}$ είναι απλά $\tau_{cb} = r_{cb} F_{cb} = \frac{a}{2} F_{cb}$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_{bc} = I \vec{l}_{bc} \times \vec{B}$ ισούται απλά με $F_{bc} = I l_{bc} B = I w B$ επειδή τα $\vec{l}_{bc}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Έτσι $\boxed{\tau_{cb} = I \frac{wa}{2} B}$ με φορά αυτή που φαίνεται στο σχήμα (ισχύει ο νόμος του δεξιόστροφου κοχλία).

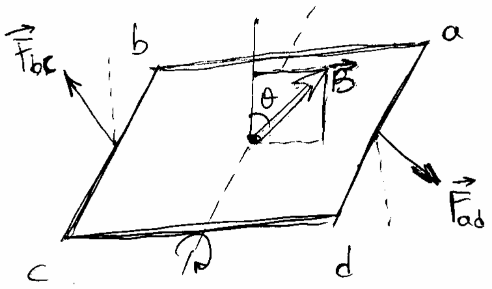
Ομοίως η ροπή $\vec{\tau}_{ad}$ λόγω του αγωγού ad έχει μέτρο $\tau_{ad} = I \frac{wa}{2} B$ και φορά την ίδια με αυτή της $\vec{\tau}_{cb}$. Έτσι η συνολική ροπή έχει μέτρο

$\vec{\tau} = \tau_{cb} + \tau_{ad} = I w a B = I A B$ όπου

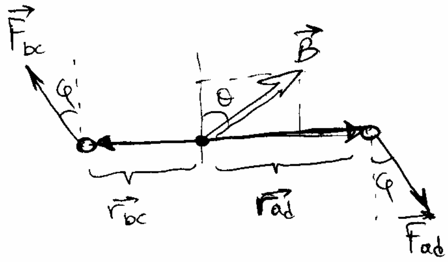
Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

$A = wl$ είναι το εμβαδό του πλαισίου. (4)

✓ Θεωρούμε τώρα το $\vec{B}$ ως προς κάποια γωνία με το πλαίσιο. Αυτό το κάνουμε και ως προς άσκηση αλλά και γιατί όπως είδαμε παραπάνω ασκείται μια ροπή στο πλαίσιο ⇒ αυτό θα περιγράψω:

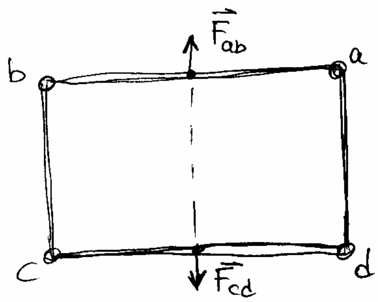


3-D



ΠΛΑΓΙΑ ΟΨΗ

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ



ΚΑΤΟΨΗ

Έστω τώρα ότι το $\vec{B}$ σχηματίζει γωνία θ με το κάθετο του πλαισίου.

Για απλότητα θεωρούμε ότι η προβολή του $\vec{B}$ πάνω στο επίπεδο του πλαισίου είναι παράλληλη στα ab και cd.

Τώρα αφού το $\vec{B}$ δεν είναι παράλληλο με τα $\vec{l}_{ab}$ και $\vec{l}_{cd}$, εμφανίζονται δύο δυνάμεις $\vec{F}_{ab}$ και $\vec{F}_{cd}$ όπως φαίνεται και στην κάτοψη, όμως αυτές είναι ίσες και αντίθετες και βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής έτσι δεν παράγουν ούτε συνολική δύναμη αλλά ούτε και συνολική ροπή.

Έτσι μπορούμε να τις αγνοήσουμε.

Παρότι το $\vec{B}$ βρίσκεται υπό κάποια γωνία ως προς το πλαίσιο, παραμένει κάθετο στις πλευρές bc και ad. Έτσι το μέτρο των δυνάμεων $\vec{F}_{bc}$ και $\vec{F}_{ad}$ είναι

$$\left.\begin{aligned} F_{bc} &= I l_{bc} B = I w B \\ F_{ad} &= I l_{ad} B = I w B \end{aligned}\right\} \text{ όπως και προηγουμένως}$$

Αυτό που αλλάζει όμως είναι το μέτρο της ροπής γιατί το $\vec{\tau}_{bc}$ (και αντίστοιχα το $\vec{\tau}_{ad}$) δεν είναι πλέον κάθετο στο $\vec{F}_{bc}$ (στο $\vec{F}_{ad}$ αντίστοιχα). Γνωρίζουμε από τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου ότι

$$\tau_{bc} = \frac{u}{2} F_{bc} \sin\varphi = \frac{u}{2} F_{bc} \cos\theta = \frac{uw}{2} IB \cos\theta$$

$$\tau_{ad} = \frac{u}{2} F_{bc} \sin\varphi = \frac{u}{2} F_{ad} \cos\theta = \frac{uw}{2} IB \cos\theta$$

όπου οι γωνίες φ και θ είναι συμπληρωματικές $\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}$ και έτσι $\sin\varphi = \cos\theta$. Η ολική ροπή είναι

$$\tau = \tau_{bc} + \tau_{ad} = uw IB\cos\theta = IAB \cos\theta$$

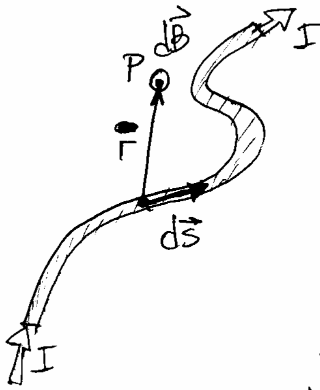
όπου $A = uw$ το εμβαδό του πλαισίου.

Δ. ΚΟΤΖΟΥΔΗΣ

στ) ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ BIOT & SAVART

Όπως είδαμε όταν ρευματοφόρος αγωγός βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο του ασκείται λόγω του μια μαγνητική δύναμη. Αλλά σύμφωνα με την αρχή δράσης-αντίδρασης πρέπει και ο αγωγός να ασκεί μια ίση και αντίθετη δύναμη στο αίτιο (π.χ. μαγν. πόλοι) που δημιουργούν αυτό το πεδίο. Άρα πρέπει και ο ρευματοφόρος αγωγός να παράγει με την σειρά του και αυτός ένα μαγνητικό πεδίο. Πόσο είναι η ένταση $\vec{B}$ αυτού του πεδίου; Την απάντηση σε αυτό μας την έδωσε ο νόμος των Biot - Savart:

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ



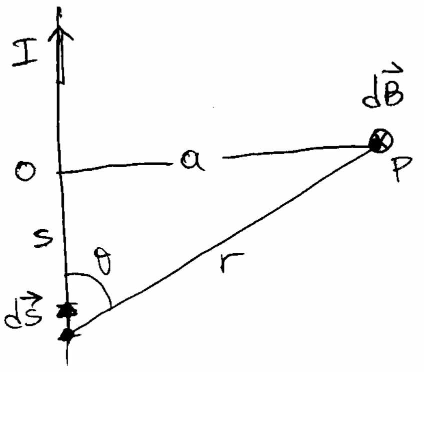
Έστω ένας αγωγός τυχαίου σχήματος που διαρρέεται από ρεύμα I. Τον χωρίζουμε σε στοιχειώδη τμήματα μήκους ds το καθένα και ορίζουμε το διάνυσμα $d\vec{s}$ παράλληλο σε κάθε σημείο στον αγωγό και με μέτρο ίσο με ds. Τότε το αντίστοιχο μαγν. πεδίο $d\vec{B}$ που παράγει το κομμάτι αυτό $d\vec{s}$ στο σημείο P που απέχει απόσταση $\vec{r}$ δίνεται από την έκφραση:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

όπου $\hat{r}$ είναι το μοναδιαίο πάνω στην διεύθυνση r (από το $d\vec{s}$ προς το σημείο P). Για να βρούμε το ολικό $\vec{B}$ πρέπει να ολοκληρώσουμε πάνω στον αγωγό.

Σημείωση: Λόγω του εξωτερικού γινομένου το $d\vec{B}$ είναι κάθετο τόσο στο $d\vec{s}$ όσο και στο $\hat{r}$. Έτσι π.χ. εάν ο παραπάνω αγωγός βρίσκεται μέσα στην σελίδα όπως και το $\hat{r}$ τότε το $d\vec{B}$ βγαίνει εκτός σελίδας.

α) παράδειγμα: Ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους: Να βρεθεί το B σε απόσταση a από τον αγωγό:



Λύση: Γνωρίζουμε ότι

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Το $d\vec{B}$ λόγω του εξωτ. γινομένου βγαίνει κάθετο στην σελίδα και προς τα μέσα (τα $d\vec{s}$ και r ανήκουν στην σελίδα)

Το μέτρο του $d\vec{B}$ είναι

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{ds\,\sin\theta}{r^2}$$

όπου θ η γωνία μεταξύ του $d\vec{s}$ και $\hat{r}$ (θυμηθείτε ότι $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta$ και ότι $|\hat{r}|=1$).

Τα $d\vec{s}$ που βρίσκονται κάτω από την ευθεία OP έχουν $\theta = 0$ (το μακρυά) έως $\theta = \pi/2$ (κοντά στο O). Τα αντίστοιχα $d\vec{s}$ πάνω από την ευθεία OP έχουν $\theta = \pi/2$ έως $\theta = \pi$. Το ημίτονο του θ δεν αλλάζει πρόσημο από $\theta = 0$ έως π επομένως όλα τα $d\vec{B}$ είναι προς τα μέσα της σελίδας και αθροίζονται. Έτσι το ολικό μαγνητικό πεδίο έχει ένταση ίση με

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{s=-\infty}^{\infty}\frac{ds\,\sin\theta}{r^2}$$

Παρόλο η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το s, σε αυτά τα προβλήματα είναι ευκολότερο να δουλεύουμε με τις γωνίες. Έτσι εκφράζουμε τα s και r συναρτήσει της θ: Το δεδομένο είναι το a επομένως

$$\tan\theta = \frac{a}{s} \Rightarrow s = \frac{a}{\tan\theta} \Rightarrow ds = -\frac{a}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Επίσης $\sin\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{a^2}$ Επομένως

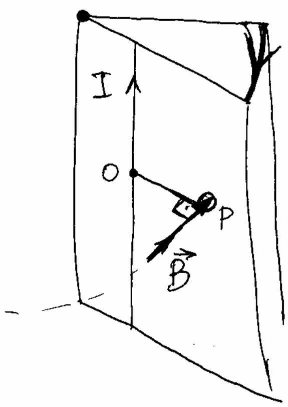
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} -\frac{\cancel{a}}{\cancel{\sin^2\theta}}\, d\theta \, \sin\theta \, \frac{\cancel{\sin^2\theta}}{\cancel{a^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta=0}^{\pi} -\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta=0}^{\pi} d(\cos\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\cos\theta\right]_0^{\pi} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot 2 \quad \text{ή}$$

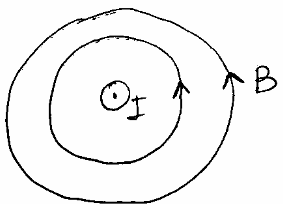
$$B = +\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

(κάπου μου έχει φύγει ένα μείον)

Λόγω συμμετρίας το $\vec{B}$ βγαίνει πάντοτε κάθετο στην σελίδα όπως "περιστρέφουμε" την σελίδα



Έτσι καταλαβαίνουμε ότι το $\vec{B}$ βρίσκεται πάνω σε ομόκεντρους κύκλους με κοινό κέντρο πάνω στον ρευματοφόρο αγωγό και πέφτει σαν "$1/r$" όσο απομακρυνόμαστε από αυτόν:



ΚΑΤΟΨΗ