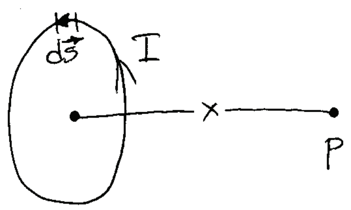
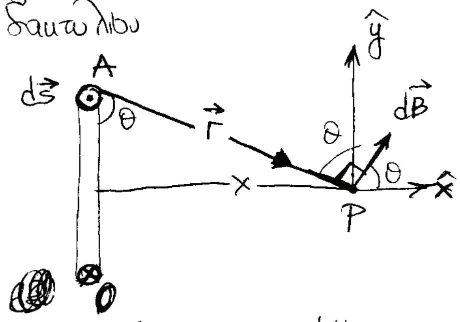
α) Μαγνητικό πεδίο δακτυλίου.

Έστω κυκλικός δακτύλιος ακτίνας R που διαρρέεται από ρεύμα I. Να βρεθεί η ένταση του μαγνητ. πεδίου $\vec{B}$ σε απόσταση x από την μεσοκάθετο του δακτυλίου




3-D



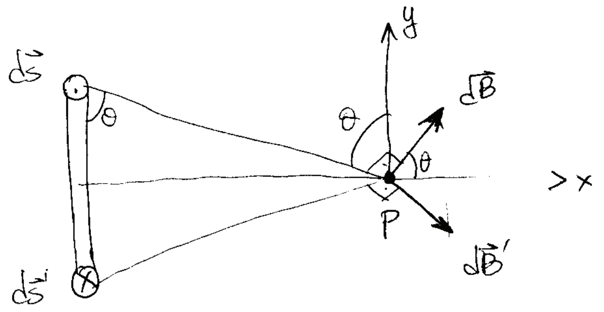

ΠΛΑΓΙΑ ΟΨΗ

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Biot-Savart.

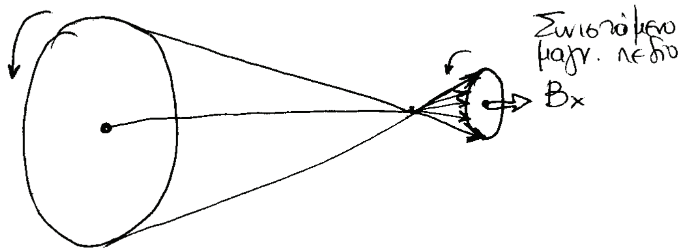
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

Εξετάζουμε πρώτα το στοιχειώδες μήκος ds που βρίσκεται στο υψηλότερο μέρος του δακτυλίου στο σημείο A. Στην πλάγια όψη το $d\vec{s}$ βγαίνει εκτός της σελίδας. Το $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης $\vec{AP}$. Το $d\vec{B}$ είναι κάθετο και στο $\vec{r}$ και στο $d\vec{s}$ και έτσι έχει την διεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα. Το $d\vec{B}$ είναι μέσα στην σελίδα με διεύθυνση κάθετη στο $\vec{r}$. Επειδή τα $\vec{r}$ και $d\vec{s}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο του $d\vec{s}\times\vec{r}$ είναι απλά $ds \cdot r$ και έτσι $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds\, r}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{r^2}$. Τώρα θα εξετάσουμε τον συνδυασμό των $d\vec{B}$ που δημιουργούνται από το $d\vec{s}$ στο A και το $d\vec{s}'$ στο σημείο Γ (στο χαμηλότερο σημείο του δακτυλίου):




Φαίνεται ότι τα $d\vec{B}$ και $d\vec{B}'$ έχουν αντίθετες y συνιστώσες ενώ οι x συνιστώσες αθροίζονται. Έτσι εάν πάρουμε όλα τα αντιδιαμετρικά σημεία στον δαχτύλιο, παράγουν λόγω συμμετρίας μόνο x συνιστώσα στο σημείο P. Έτσι θα ολοκληρώσουμε μόνο την x-συνιστώσα

$dB_x = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{r^2}\cos\theta$ πάνω σε όλο τον δαχτύλιο:




$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{ds}{r^2}\cos\theta$ Το r και θ δεν μεταβάλλονται όσο ολοκληρώνουμε πάνω στον δαχτύλιο. Έτσι βγαίνουν εκτός ολοκληρώματος

$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}\int ds$ Το συνολικό μήκος $\int ds$ του δαχτυλίου είναι ίσο με την περίμετρο του $2\pi R$. Έτσι:

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{\cancel{4}\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}\cancel{2\pi} R = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{\cos\theta}{r^2}R$$

Τέλος εκφράζουμε τα $r$ και $\theta$ συναρτήσει των δεδομένων $x$ και $R$: $r^2 = x^2 + R^2$

$\cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$ και έτσι $B_x = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$

Οριακές περιπτώσεις: Στο κέντρο του δακτυλίου $x=0$

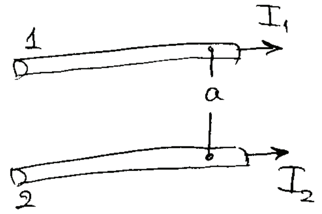
$B_x = \frac{\mu_0 I}{2R}$. Για μεγάλα $x \gg R$ $(x^2+R^2)^{3/2} \simeq (x^2)^{3/2} = x^3$

και έτσι $B_x = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{x^3}$

Δ. Κουζούδης

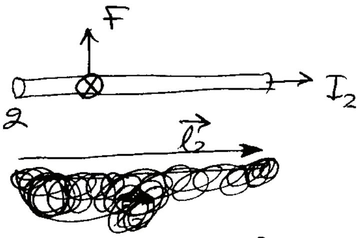
c) Μαγνητική δύναμη ανάμεσα σε δύο παράλληλους αγωγούς.

Έστω δύο αγωγοί σε απόσταση $a$ οι οποίοι διαρρέονται από ρεύματα $I_1$ και $I_2$ αντίστοιχα. Πόση είναι η δύναμη μεταξύ τους;




Λύση: Όπως είδαμε το μαγνητικό πεδίο που παράγει ένας αγωγός σε απόσταση $r$ δίνεται από την $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Έτσι ο αγωγός 1 παράγει ένα πεδίο επάνω $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$ στην περιοχή του αγωγού 2. Το $\vec{B}_1$ βρίσκεται πάνω σε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο τον αγωγό 1 και έτσι τέμνει τον αγωγό 2 κάθετα.

Ο αγωγός 2 διαρρέεται από ρεύμα $I_2$ και βρίσκεται μέσα σε μαγν. πεδίο $\vec{B}_1$. Επομένως ασκείται επάνω του δύναμη




$\vec{F} = I_2 \vec{l}_2 \times \vec{B}_1$ όπου $\vec{l}_2$ το διάνυσμα μήκους του αγωγού 2, παράλληλο με το ρεύμα $I_2$.

Αφού τα $\vec{l}_2$ και τα $\vec{B}_1$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της δύναμης είναι $F = I_2 l_2 B_1 = I_2 l_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$.

Συνήθως μας ενδιαφέρει η δύναμη ανά μονάδα μήκους των αγωγών.

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{a}$$ όπου $l = l_2$ το κοινό τους μήκος.

Εάν λάβουμε υπόψη τη φορά των δυνάμεων εύκολα βλέπουμε ότι

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Ομόρροπα ρεύματα} & \text{έλκονται} \\ \text{Αντίρροπα} \quad \text{-"-} & \text{απωθούνται} \end{array} \right.$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

σ) Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ AMPERE.

Ο νόμος του Ampere είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$. Ο νόμος λέει ότι το ολοκλήρωμα $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ πάνω σε μια κλειστή καμπύλη η οποία περιγράφεται από τα στοιχειώδη μήκους $d\vec{s}$, ισούται με $\mu_0$ επί $I$, όπου $I$ είναι το