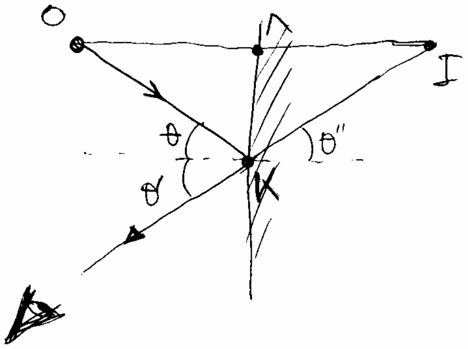
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

α) Επίπεδο κάτοπτρο.

Σύμφωνα με τον νόμο ανάκλασης - διάθλασης του φωτός, η γωνία της ~~προσπίπτουσας~~ ανακλώμενης ακτίνας ισούται με την γωνία της προσπίπτουσας δέσμης. Αυτή η ιδιότητα βρίσκει εφαρμογή στα κάτοπτρα. Έστω ένα σημειακό αντικείμενο Ο. Οι ακτίνες που φεύγουν από αυτό ~~...~~ προς τα δεξιά, ανακλώνται στο κάτοπτρο.

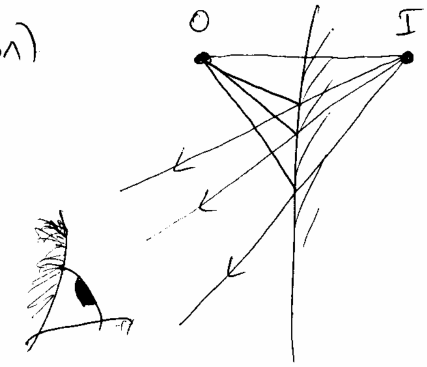


Έστω μια τέτοια ακτίνα ΟΚ. Η γωνία ανάκλασης θ' ισούται με την γωνία πρόσπτωσης θ. Όμως η θ' ισούται με την θ''. Άρα τα τρίγωνα ΟΚΛ και ΙΚΛ είναι ίσα. Έτσι το μάτι που κοιτάζει προς το Κ έχει την ψευδαίσθηση ότι η ακτίνα έρχεται από το Ι. Όμοια και για τις άλλες ακτίνες.

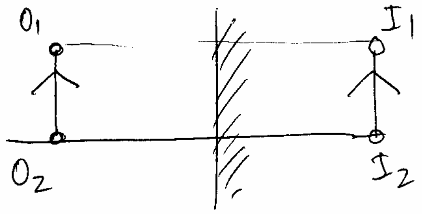
Λόγω της ισότητας των $\overset{\triangle}{ΟΚΛ}$ και $\overset{\triangle}{ΙΚΛ}$ το είδωλο Ι φαίνεται να βρίσκεται στην ίδια απόσταση ΛΙ από το κάτοπτρο όπως και το πραγματικό αντικείμενο ~~...~~ από το

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

κάτοπτρο (απόδειξη ολ)
Για αυτό τον λόγο εάν πάρουμε δύο σημειακά αντικείμενα, βλέπουμε ότι οι αποστάσεις τους διατηρούνται



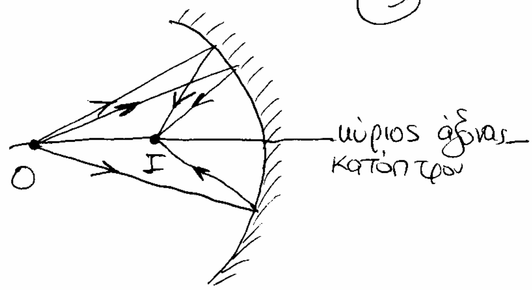
στο κάτοπτρο, δηλαδή στο παραπάνω σχήμα εάν $x = O_1O_2$ τότε $y = x$ όπου $y = I_1I_2$.



Άρα η μεγέθυνση ενός επίπεδου κατόπτρου είναι $M = \frac{y}{x} = 1$ πάντοτε.

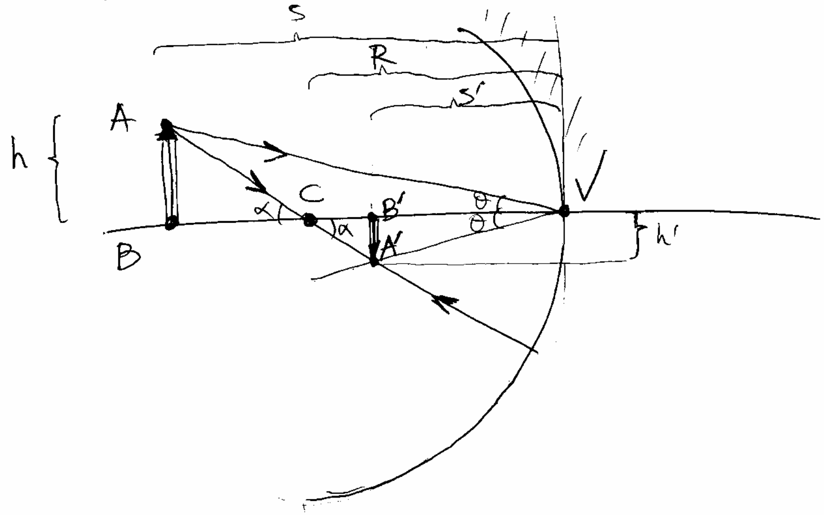
Θα δούμε ότι $M \neq 1$ στην περίπτωση των κοίλων κατόπτρων και των φακών.

α) κοίλο κάτοπτρο
Έστω ένα αντικείμενο O στην μεριά του κατόπτρου που είναι κυρτή. Όπως και στο επίπεδο κάτοπτρο, οι ακτίνες που φεύγουν από αυτό, ανακλούν στο κάτοπτρο. Εάν το κάτοπτρο είναι σφαιρικό και οι ακτίνες σχηματίζουν μικρές σχετικές γωνίες με τον κύριο άξονα του κατόπτρου, τότε συγκλίνουν σε ένα σημείο I:



Ας δούμε τώρα την μεγέθυνση ενός αντικειμένου, έστω του AB.

Όλες οι αποστάσεις για σφαιρ. κάτοπτρα μετριούνται από την βάση του V. Για να βρούμε το είδωλο της κορυφής A του αντικειμένου, αρκεί να φέρω δύο ακτίνες και να δω πού συγκλίνουν. Διαλέγω δύο ειδικές ακτίνες, η μια AV που προσπίπτει στη βάση V του κατόπτρου και η άλλη AC που περνάει από το κέντρο C του (το κέντρο της σφαίρας):



Οι δύο αυτές ακτίνες συγκλίνουν στο A'. Η ακτίνα AV ανακλάται με γωνία θ ίση με την προσπίπτουσα. Η ακτίνα AC προσπίπτει κάθετα στο κάτοπτρο γιατί η αυτής μιας σφαίρας την τέμνει πάλι κάθετα) και έτσι ανακλάται στην ίδια ακριβώς διεύθυνση με αυτήν που προσέπεσε. Έστω $h=AB$ και $h'=A'B'$ τα μήκη του αντικειμένου και του ειδώλου του. Θέλουμε την μεγέθυνση $M=\frac{h'}{h}$.

Το ορθογώνιο τρίγωνο BAV και το B'A'V έχουν μια γωνία ίση (από τις μη ορθές), την θ. Άρα είναι όμοια. Άρα

$$\boxed{\frac{h}{h'}=\frac{s}{s'}} \quad (1)$$

όπου $s=BV$ και $s'=B'V$

Δ. Καζαντζίδης

Όμως από το τρίγωνο CAB έχουμε

$$\tan\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{h}{s-R}$$

Ομοίως από το CA'B' έχουμε

$$\tan\alpha=\frac{A'B'}{CB'}=\frac{h'}{R-s'}$$

Εξισώνοντας τα tan έχουμε

$$\boxed{\frac{h}{s-R}=\frac{h'}{R-s'}} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$\frac{s}{s'}=\frac{s-R}{R-s'}$$

Στον αριθμητή εμφανίζεται το s ενώ στον παρανομαστή το s'. Διαιρώ λοιπόν τους αριθμητές με s και τους παρονομαστές με s'!

και έχω $\frac{1}{1} = \frac{1 - R/s}{R/s' - 1} \Rightarrow 1 - \frac{R}{s} = \frac{R}{s'} - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{R}{s'} + \frac{R}{s} = 2 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}}$

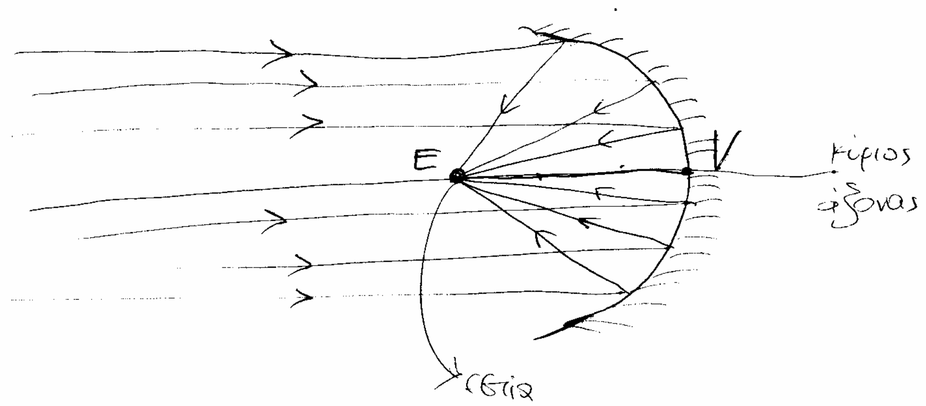
εξίσωση κοίλων κατόπτρων

Δ. Κατσαρδής

ο) Ορισμός εστιακής απόστασης – εστίας.

Εστία είναι το σημείο εκεί όπου συγκλίνουν ακτίνες που προσπίπτουν στο κάτοπτρο παράλληλα με τον κύριο άξονά του, δηλαδή από αντικείμενα που βρίσκονται στο άπειρο:

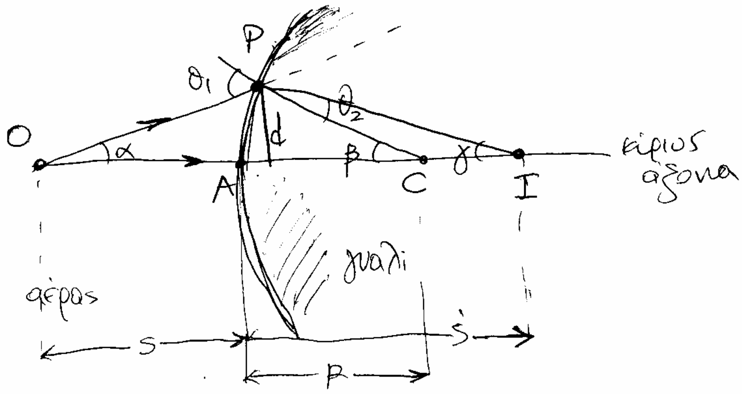
Αντικείμενο στο ∞



Η απόσταση f=EV ονομάζεται εστιακή απόσταση του κατόπτρου. Εάν στην εξίσωση του κατόπτρου θέσουμε $s \to \infty$ τότε η s' είναι ίση με f και: $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R} \Rightarrow f = R/2$ (το παραπάνω σχήμα είναι κάπως απλοποιημένο!!!)

σ) Φακοί.

Ας δούμε πως εστιάζει μια κοίλη γυάλινη επιφάνεια ένα σημειακό αντικείμενο O. Ας εξετάσουμε μια τυχαία ακτίνα OP που προσπίπτει στην γυάλινη επιφάνεια



Έστω ότι η κοίλη επιφάνεια είναι σφαιρική και C είναι το κέντρο της. Τότε η CP είναι η κάθετη στην επιφάνεια στο σημείο P. Έτσι θ_1 είναι η γωνία πρόσπτωσης κ θ_2 η γωνία διάθλασης. Όπως είδαμε αφού $n_{\text{γυαλιού}} > n_{\text{αέρα}} = 1$ τότε $\theta_2 < \theta_1$. Επομένως η ακτίνα OP θα συναντήσει κάπου τον κύριο άξονα. Η ακτίνα OA προσπίπτει κάθετα στην επιφάνεια του γυαλιού άρα συνεχίζει κάθετα και συναντά την ακτίνα PI στο σημείο I. Άρα το O εστιάζεται στο I.

Ζησόπουλος Χ.

Θέλουμε μια σχέση που να συνδέει τις αποστάσεις $s = OA$ και $s' = AI$. Αυτήν θα την βρούμε από την γεωμετρία και τον νόμο του Snell:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$ εδώ έχουμε $n_1 = 1$ αέρας, $n_2 = n$ γυαλί

Έτσι $\sin\theta_1 = n \sin\theta_2$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ

Σε όλα τα προβλήματα που έχουν να κάνουν με κοίλα κάτοπτρα και φακούς, εργαζόμαστε μόνο με "παραξονικές ακτίνες", ακτίνες δηλαδή που σχηματίζουν μικρή γωνία με τον κύριο άξονα. Αλλιώς α) ακτίνες με μεγάλες γωνίες δεν εστιάζονται σε ένα σημείο (σφαιρική εκτροπή) κ β) το πρόβλημα γίνεται μαθηματικώς δύσκολο.

Στις μικρές γωνίες ισχύει $\sin\alpha \simeq \alpha$, $\cos\alpha \simeq 1$ (σε rad)

κ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \simeq \dfrac{\alpha}{1} = \alpha$.

Δηλαδή $\sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha$.

Έτσι ο νόμος του Snell για παραξονικές ακτίνες γίνεται $\boxed{\theta_1 \simeq n\theta_2}$ (1)

Από το τρίγωνο OPC έχουμε: (8)

$\theta_1 = \alpha + \beta$ (2) (Η παραπληρωματική γωνία ενός τυχαίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών του τριγώνου). Ομοίως από το τρίγωνο CPI

$\beta = \theta_2 + \gamma$ (3)

Αντικαθιστούμε τις (2) και (3) στην (1):

$\alpha + \beta = n(\beta - \gamma)$ (4)

Δ. ΚΟΥΖΟΥΛΗΣ

Από τις εφαπτόμενες των γωνιών α, β και γ έχουμε

$\tan\alpha = \frac{PD}{OD}$ $\tan\beta = \frac{PD}{DC}$ $\tan\gamma = \frac{PD}{DI}$

Όμως επειδή στη για παραξονικές ακτίνες $\tan x \simeq x$. Επίσης στην ίδια προσέγγιση το AD είναι μικρό και έτσι τα A και D είναι πολύ κοντά. Επομένως

$\alpha \simeq \frac{d}{s}$ $\beta \simeq \frac{d}{R}$ $\gamma \simeq \frac{d}{s'}$. Αντικαθιστούμε στην (4) και έχουμε

$$\frac{d}{s} + \frac{d}{R} = n\frac{d}{R} - n\frac{d}{s'} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{n-1}{R}}$$

Που είναι η ζητούμενη σχέση