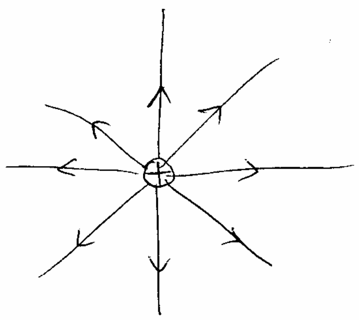
α) Δυναμικές Γραμμές: Κανόνες σχεδίασης:

1. Ξεκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία (ή στο άπειρο) ⊕ → ⊖
2. Το $\vec{E}$ είναι εφαπτόμενο σε αυτές $\vec{E}$
3. Η πυκνότητά τους είναι ανάλογη του μέτρου του $\vec{E}$
4. Δεν τέμνονται μεταξύ τους

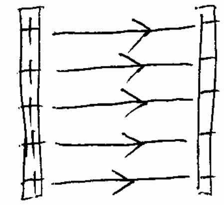
Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

β) παραδείγματα:



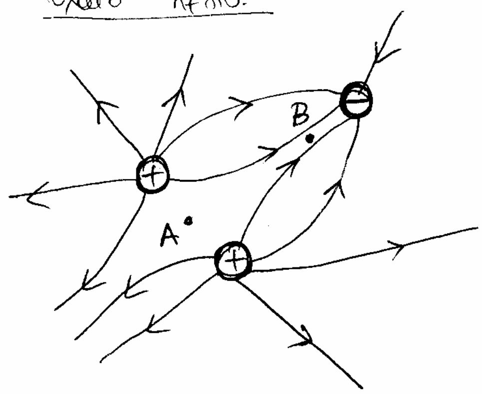
Σημειακό θετικό φορτίο. Οι δυναμ. γραμμές πηγάζουν από αυτό και επειδή δεν υπάρχουν κάπου κοντά αρνητικά φορτία, θεωρούμε ότι βρίσκονται στο ∞. Έτσι οι δυναμ. γραμμές, άρα και το $\vec{E}$, είναι ακτινικά προς τα έξω. Είναι πυκνότερες κοντά στο φορτίο και αραιώνουν όσο απομακρυνόμαστε από αυτό άρα το $|\vec{E}|$ πέφτει με την απόσταση όπως προβλέπει και ο νόμος του Coulomb $E = k\frac{q}{r^2}$

Ομοιογενές πεδίο πυκνωτή: Αφού το φορτίο είναι



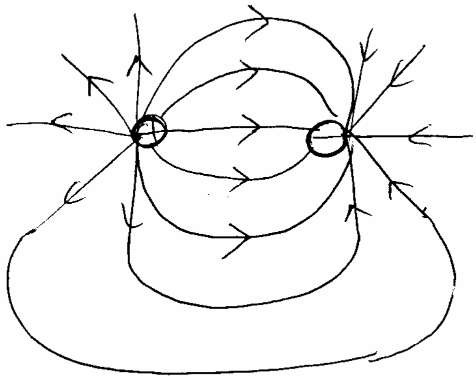
ομοιόμορφα κατανεμημένο και ίσο και στις δύο πλάκες, τότε οι δυναμ. γραμμές είναι παράλληλες και ισαπέχουσες ⇒ το $\vec{E}$ είναι παντού σταθερό μέσα στον πυκνωτή και η διεύθυνσή του είναι προς τα δεξιά.

Τυχαίο πεδίο:



Στο σημείο Α οι γραμμές είναι πολύ αραιές ⇒ $E_A \simeq 0$. Αντίθετως στο Β η ένταση E_B πρέπει να είναι μεγάλη. Οι γραμμές δεν τέμνονται πουθενά. Μερικές καταλήγουν στο άπειρο.

Δίπολο (δύο ίσα και αντίθετα φορτία)

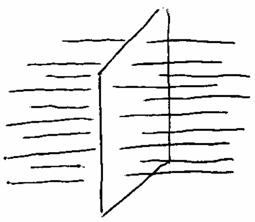


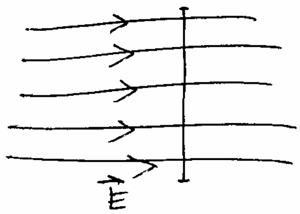
Οι δυναμικές γραμμές από το θετικό φορτίο καταλήγουν στο αρνητικό φορτίο αφού καμπυλώνουν έτσι ώστε να μη τέμνονται μεταξύ τους.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

α) ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ.

Η ηλεκτρική ροή είναι ένα μέτρο του πόσες δυναμικές γραμμές διαπερνούν μια συγκεκριμένη επιφάνεια. Ας ξεκινήσουμε από την απλούστερη περίπτωση ομογενούς $\vec{E}$ και ορθογώνιου πλαισίου κάθετου στο $\vec{E}$:

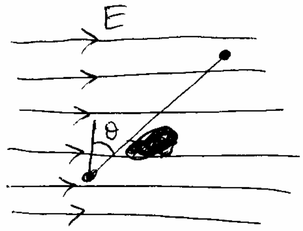




ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΟΨΗ

Η ροή Φ μέσα από το πλαίσιο θα είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η επιφάνεια A του πλαισίου και όσο πιο πυκνές είναι οι δυναμ. γραμμές, δηλαδή το μέτρο του $\vec{E}$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε $\Phi = EA$

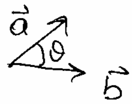
Τώρα μεταβάλλουμε την γωνία θ. Εύκολα φαίνεται ότι όσο μικρότερη είναι η θ τόσο μεγαλύτερη είναι η ροή.



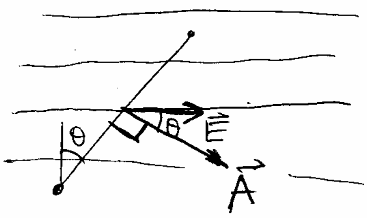
Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΔΗΣ

Αποδεικνύεται ότι $\Phi = EA\cos\theta$. Εάν θυμηθούμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$



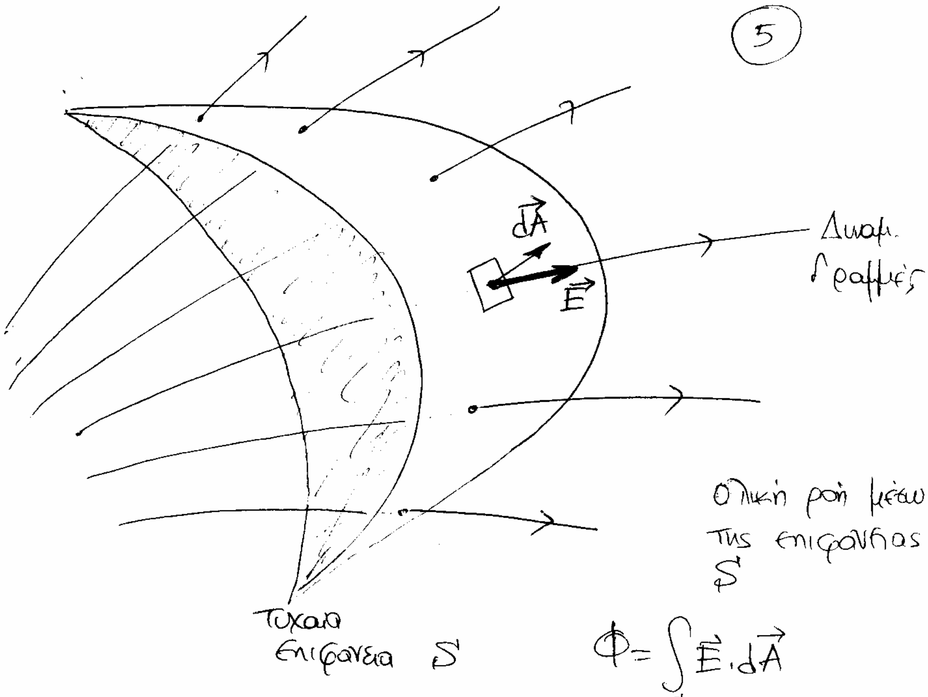
Τότε βλέπουμε ότι μοιάζει με την έκφραση της Φ παραπάνω. Ορίζουμε το διάνυσμα $\vec{A}$ έτσι ώστε να είναι κάθετο στο πλαίσιο και να έχει μέτρο ίσο με την επιφάνεια (εμβαδό) του πλαισίου.



Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Τότε βλέπουμε ότι η γωνία θ είναι ίδια με αυτήν που ορίσαμε πιο πάνω και έτσι η ροή Φ μπορεί να γραφτεί σε κάπως πιο συμπαγή μορφή $\Phi = \vec{E}\cdot\vec{A}$ (εάν πάλι σας τρομάζουν τα μαθηματικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την $\Phi = EA\cos\theta$).

Στην πιο γενική περίπτωση όπου έχουμε τυχαία επιφάνεια και μη ομογενές πεδίο, "κόβουμε" την επιφάνεια σε μικρά στοιχειώδη πλαίσια, φέρνουμε το κάθετο $d\vec{A}$ σε αυτά, υπολογίζουμε την στοιχειώδη ροή $d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A}$ που τα διαπερνά, και ολοκληρώνουμε σε όλη την επιφάνεια για να βρούμε την ολική ροή $\Phi = \int d\Phi = \int \vec{E}\cdot dA$



$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Δ. Κουζούδης

α) ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

Ο νόμος του Gauss λέει ότι η ροή Φ μέσα από μια <u>κλειστή</u> επιφάνεια ισούται με το φορτίο q που περικλύει δια ϵ_0 την διηλεκτρική σταθερά του κενού:

ροή σε κλειστή επιφάνεια

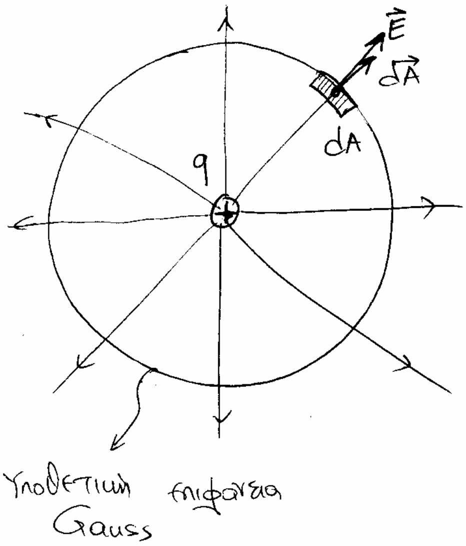
$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}}, \quad \epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

περικλυόμενο φορτίο

Ο νόμος του Gauss είναι πολύ χρήσιμος γιατί μας επιτρέπει τον υπολογισμό του $\vec{E}$ σε περιπτώσεις που υπάρχει συμμετρία.

α) Παράδειγμα: Να αποδειχθεί ο νόμος του Coulomb για ένα θετικό σημειακό φορτίο $E = k\frac{q}{r^2}$.

Λύση: Διαλέγω ως επιφάνεια Gauss μια σφαίρα ακτίνας r με κέντρο το φορτίο q. Οι δυναμικές γραμμές είναι ακτινικές προς τα έξω.



"Κόβουμε" τη σφαίρα σε μικρές επιφάνειες με εμβαδό dA, φέρουμε το κάθετο διάνυσμα $d\vec{A}$ σε αυτές και παρατηρούμε ότι $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA\cos\theta = E\,dA$ γιατί $\theta = 0$ διότι $\vec{E} \parallel d\vec{A}$.

Η ολική ροή μέσα από την κλειστή επιφάνεια είναι

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E\,dA$$

Ο κύκλος στο ολοκλήρωμα συμβολίζει την κλειστή επιφάνεια. Παρατηρούμε ότι οι δυναμ. γραμμές αραιώνουν όσο μετακινούμαστε απ' το q στο ∞ επομένως το E μειώνεται κατά μήκος μιας ακτίνας. Όμως εάν μετακινηθούμε πάνω στην

επιφάνεια η πυκνότητα των δυναμ. γραμμών (7)
είναι η ίδια (εφ' όσον ισαπέχουμε από το q). Επομέ-
νως το E είναι σταθερό πάνω στην επιφάνεια ⇒
είναι σταθερό στο ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια ⇒
μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος. Έτσι

$$\Phi = \oint E\, dA = E \oint dA$$

όμως $\oint dA$ είναι η ολική επιφάνεια της σφαίρας
$A = 4\pi r^2$ και έτσι $\Phi = E\, 4\pi r^2$. Από τον
νόμο του Gauss γνωρίζουμε ότι η ροή αυτή
ισούται με q/ε_0 έτσι

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}.$$

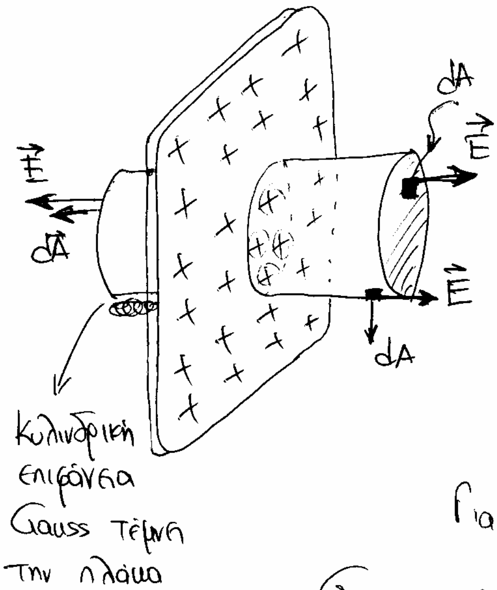
Συγκρίνοντας με τον νόμο του Coulomb $E = k\frac{q}{r^2}$
βλέπουμε ότι οι δύο σταθερές k και ε_0 συνδέονται
ως $\boxed{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$.

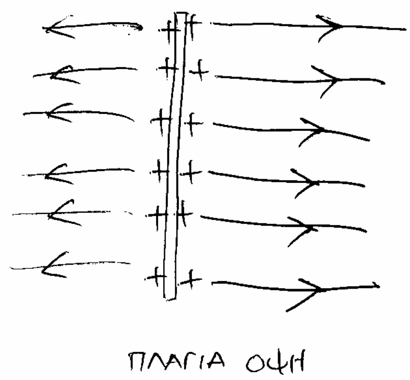
α) Για την λύση των προβλημάτων με συνεχή κατανομή
φορτίου πρέπει να θυμόμαστε ότι στους αγωγούς το φορτίο
ΠΑΝΤΟΤΕ πηγαίνει στην επιφάνεια (όπως και να φορτίσουμε το
σώμα αρχικά) και μέσα $\vec{E} = 0$ στον αγωγό. Στους μονω-
τές το φορτίο μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε στο σώμα και
γενικά $\vec{E} \neq 0$ στο εσωτερικό του

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

α) Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ παντού στον χώρο εξαιτίας μιας λεπτής επίπεδης πλάκας απείρου επιφάνειας η οποία είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.

Λύση:

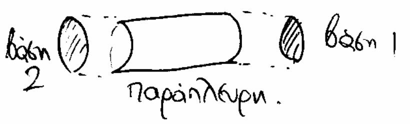




Για να εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss πρέπει να έχουμε κατά νου την κατανομή των δυναμ. γραμμών. Εφόσον γνωρίζουμε ότι οι δυναμ. γραμμές α) ξεκινούν από τα θετικά (+) φορτία και καταλήγουν στα (-) και β) δεν τέμνονται μεταξύ τους, τότε συμπεραίνουμε ότι οι δυναμ. γραμμές του προβλήματος είναι κάθετες στην επιφάνεια της πλάκας και κατευθύνονται από τα φορτία της πλάκας (+) προς το ∞ (εκεί

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

υποτίθεται ότι βρίσκονται τα αρνητικά. Διαλέγουμε μια κυλινδρική επιφάνεια Gauss μήκους L και εμβαδού διατομής A. Η κυλινδρική επιφάνεια αποτελείται από τρεις επιμέρους επιφάνειες, τις δύο βάσεις και την παράπλευρη



Ο νόμος του Gauss γίνεται

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{\text{βάση 1}} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{\text{βάση 2}} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{\text{παρα-πλευρη}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

όπου q το φορτίο που περικλείει ο κύλινδρος (δείχνεται με το σύμβολο $\oplus$ στο σχήμα). Στην παράπλευρη επιφάνεια το $\vec{E}$ είναι κάθετο στο κάθετο $d\vec{A}$ της στοιχειώδους επιφάνειας dA και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A}=0$. Αντιθέτως στις δύο βάσεις $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ και έχουμε $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA$. Επομένως

$$\int_{\text{βάση 1}} E\,dA + \int_{\text{βάση 2}} E\,dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Αφού η κατανομή φορτίου είναι ομοιόμορφη $\Rightarrow$ οι δυναμ. γραμμές θα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες ⇒ το E είναι ομοιογενές ⇒ παντού σταθερό (αλλάζει φορά όμως πάνω στην πλάκα). Έτσι μπορεί να βγη έξω ολοκληρώματος:

$$E\int_{\text{βάση }1} dA + E\int_{\text{βάση }2} dA = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow EA + EA = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E = \frac{q}{2A\epsilon_0}$$ όμως το $\frac{q}{A}$ είναι το φορτίο ανά μονάδα επιφανείας πάνω στην κοινή τομή του κυλίνδρου με την πλάκα. Επομένως $\boxed{E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$.

ο) Παράδειγμα. Να βρεθεί το ίδιο για μονωτική σφαίρα ακτίνας R ομοιόμορφα φορτισμένης με φορτίο Q

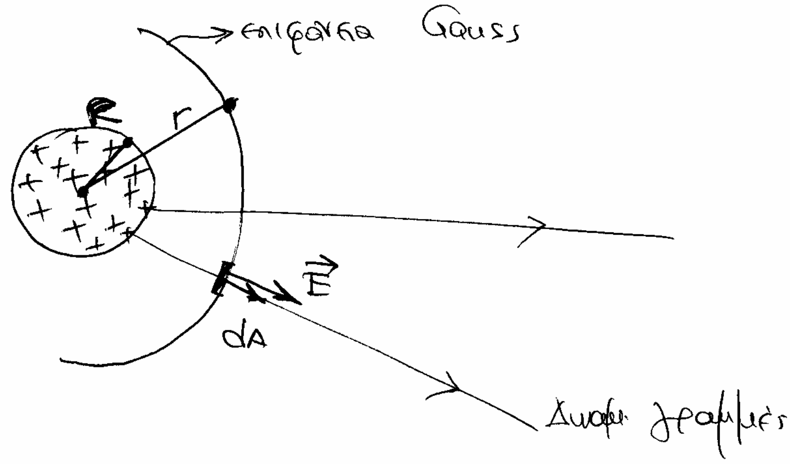
ο) Λύση:

Χωρίζουμε δύο περιοχές: έξω από την σφαίρα και μέσα από την σφαίρα. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας θα διαλέξουμε μια σφαιρική επιφάνεια Gauss με ακτίνα r. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Δ. Κατζογλης

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

α) $r>R$ (εκτός σφαίρας).



όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα οι δυναμ. γραμμές πηγαίνουν από το φορτίο της σφαίρας στο ∞ και το πεδίο είναι ακτινικό. Πάνω στην σφαίρα Gauss το $\vec{E}$ είναι παράλληλο με το κάθετο $d\vec{A}$ της στοιχειώδους επιφάνειας dA. Έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A} = EdA$ και ο νόμος του Gauss γίνεται

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint E\,dA = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

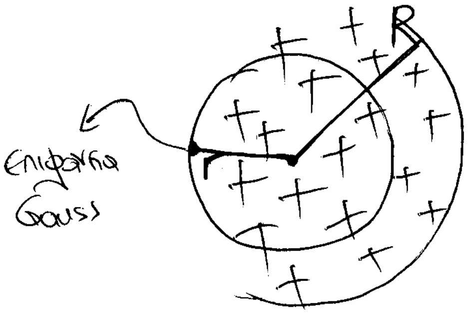
Το πεδίο δεν είναι ομοιογενές αλλά είναι σταθερό πάνω στην επιφάνεια Gauss αφού όπου και να σταθούμε σε αυτήν την επιφάνεια, η πυκνότητα των δυναμ. γραμμών είναι η ίδια. Έτσι το E μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$E\oint dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$

Το εμβαδό μιας σφαίρας ακτίνας r είναι $A = 4\pi r^2$ και έτσι $E\,\frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}}$

Το ίδιο με το E σημειακού φορτίου!!!

β) $r<R$ (εντός της σφαίρας):



Δουλεύουμε ακριβώς όπως προηγουμένως. Το μόνο που αλλάζει είναι το περικλειόμενο φορτίο Q'. Τώρα $Q'<Q$. Πως θα βρούμε το Q'; Εφόσον η σφαίρα είναι ομογενής το φορτίο βρίσκεται παντού. Αφού μας δίνεται ότι είναι ομοιόμορφα φορτισμένη τότε ίσοι όγκοι θα περιέχουν ίσα φορτία. Με απλή μέθοδο των τριών $\frac{Q'}{Q} = \frac{V'}{V}$ όπου V' ο όγκος που περικλείει η επιφ. Gauss και V ο όγκος της φορτισμένης σφαίρας. Έτσι $\frac{Q'}{Q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow Q' = Q\frac{r^3}{R^3}$ και ο νόμος του Gauss δίνει

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q'}{r^2} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q\frac{r^3}{R^3 r^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}}$$

Δ. ΚΟΤΖΟΓΛΗΣ