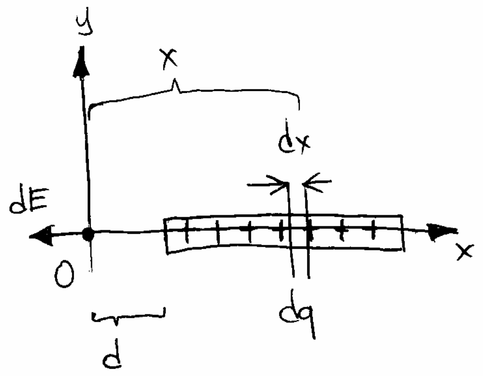
(11)



Η ράβδος απέχει απόσταση d από την αρχή των αξόνων. Κόβουμε ένα κομμάτι μικρό μήκους dx το οποίο περιέχει φορτίο dq. Στο όριο $dx \to 0$ το φορτίο αυτό είναι σημειακό και ισχύει ο νόμος του Coulomb: Το πεδίο που δημιουργεί σε απόσταση x ισούται με

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{x^2}(-\hat{x})$$

όπου $-\hat{x}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα προς τα αριστερά.

Δ. ΦΟΥΖΟΥΝΗΣ

Το λ είναι η γραμμική πυκνότητα φορτίου που ορίζεται ως: $\lambda = \frac{\text{φορτίο}}{\text{μήκος}}$. Για ομοιόμορφη κατανομή φορτίου ο λόγος αυτός είναι σταθερός, είτε πάρουμε όλο το μήκος της ράβδου ℓ, είτε πάρουμε ένα μικρό κομμάτι της dx.

Έτσι $\lambda = \frac{Q}{\ell} = \frac{dq}{dx}$: σταθερό

Λύνοντας ως προς dq έχουμε $dq = \lambda dx = \frac{Q}{\ell}dx$

Για να βρούμε το συνολικό $\vec{E}$ ολοκληρώνουμε σε όλη την ράβδο από $x=d$ έως και $x=d+\ell$. Επειδή όλα τα $d\vec{E}$ που προκύπτουν έχουν την ίδια φορά, δεν χρειάζεται να αθροίσουμε διανυσματικώς, αρκεί να πάρουμε το μέτρο dE του $d\vec{E}$:

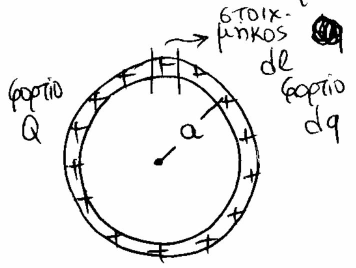
$$E=\int_{x=d}^{d+l} dE = k\int_{x=d}^{d+l}\frac{dq}{x^2} =$$

$$= k\frac{Q}{l}\int_{x=d}^{d+l}\frac{dx}{x^2} = k\frac{Q}{l}\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=d}^{d+l} =$$

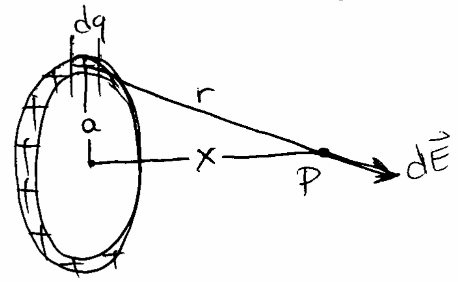
$$= k\frac{Q}{l}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+l}\right) = k\frac{Q}{l}\,\frac{\cancel{d}+l-\cancel{d}}{d(d+l)} \Rightarrow$$

$$\boxed{E=\frac{kQ}{d(d+l)}}$$

γ) Παράδειγμα. Ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας a με φορτίο Q. Να βρεθεί το $\vec{E}$ σε απόσταση x από το κέντρο του (πάνω στην μεσοκάθετο).



ΚΑΤΟΨΗ



ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ

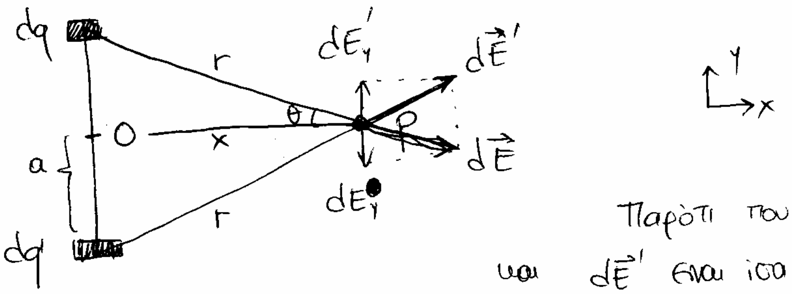
Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Λύση: Κόβουμε ένα μικρό στοιχειώδες μήκος dl πάνω στην περιφέρεια του δακτυλίου στο υψηλότερο σημείο. Αυτό περιέχει φορτίο dq και απέχει απόσταση r από το υπό-εξέταση σημείο P.

όπου $l = 2\pi a$ το μήκος της περιφέρειας του δακτυλίου. Το dE δίνεται από τον νόμο του Coulomb:

$$dE = k\frac{dq}{r^2}$$

Πρέπει όμως να προσέξουμε εδώ την διανυσματική άθροιση των $d\vec{E}$ γιατί δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους. Για παράδειγμα τα $d\vec{E}$ και $d\vec{E}'$ λόγω των dq και dq' στο πάνω και κάτω άκρο του δακτυλίου φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:

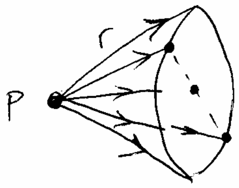


ΠΛΑΓΙΑ ΟΨΗ

Παρότι που τα $d\vec{E}$ και $d\vec{E}'$ είναι ίσα κατά μέτρο (αφού απέχουν την ίδια απόσταση r από τα φορτία, και $dq = dq'$ εάν κόψουμε το ίδιο μήκος dl), οι φορείς τους διαφέρουν. Παρατηρούμε όμως ότι οι y συνιστώσες τους αλληλοαναιρούνται, δηλαδή $dE_y' = -dE_y$ και έτσι επιβιώνουν μόνο οι x-συνιστώσες. Αυτό γίνεται λόγω συμμετρίας του προβλήματος. Ομοίως εάν εξετάσουμε και τα υπόλοιπα φορτία από ζεύγη σε αντιδιαμετρικές θέσεις πάνω στον δακτύλιο, όπως περιστρέφουμε πάνω σε αυτόν τα $d\vec{E}$ και $d\vec{E}'$

Δ. ΓΟΥΖΟΥΔΗΣ

περιστρέφονται και αυτά αλλά πάντα οι συνιστώσες τους οι κάθετες στο x αλληλοαναιρούνται (τα $d\vec{E}$ σχηματίζουν ένα κώνο):



Έτσι επιβιώνει μόνο η x-συνιστώσα του κάθε dE η οποία ισούται με

$$dE_x = dE\cos\theta = dE\,\frac{x}{r}$$

Επομένως παρόλο η άθροιση είναι διανυσματική, καταλήγει να γίνει απλά αριθμητική αφού όλα τα dE_x είναι παράλληλα μεταξύ τους.

Έτσι $E_x = \int_{\text{δακτύλιο}} dE_x = k\int_{\text{δακτύλιο}} \frac{dq}{r^2}\frac{x}{r}$ όμως τα r και x δεν μεταβάλλονται όπως περιστρεφόμαστε πάνω στο δακτύλιο οπότε βγαίνουν εκτός ολοκληρώματος:

$$E_x = \frac{k}{r^3}x\int_{\text{δακτύλιο}} dq = x\frac{k}{r^3}Q$$

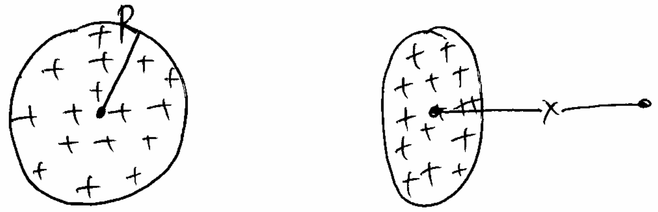
Όπως είπαμε όμως το ολικό πεδίο έχει μόνο x-συνιστώσα οπότε

$$E = E_x = kQ\frac{x}{r^3} = kQ\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το πυθαγόρειο θεώρημα $r^2 = x^2 + a^2 \Rightarrow r = (x^2+a^2)^{1/2}$.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

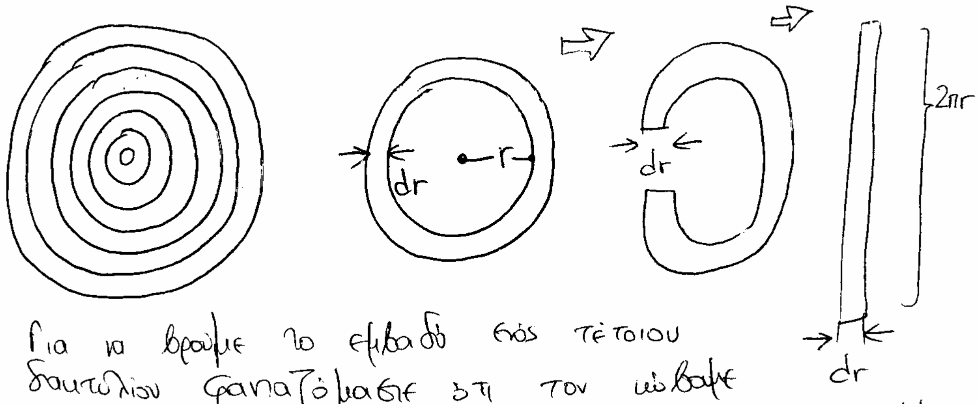
ε) παράδειγμα: Ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_0 και ακτίνα R. Να βρεθεί το $\vec{E}$ σε απόσταση x από το κέντρο του (πάνω στην μεσοκάθετο)



ΚΑΤΟΨΗ

ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΟΨΗ.

Μπορούμε να κόψουμε τον δίσκο σε μικρά κομματάκια με φορτίο dq και να δουλέψουμε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε τα ήδη υπάρχοντα αποτελέσματα, όπως το $\vec{E}$ λόγω δακτυλίου. Έτσι χωρίζουμε τον δίσκο σε μια σειρά από λεπτούς δακτυλίους ακτίνας r και πάχους dr ο καθένας:



Για να βρούμε το εμβαδό ενός τέτοιου δακτυλίου φανταζόμαστε ότι τον κόβουμε σε ένα σημείο και τον φέρνουμε σε σχήμα ευθύγραμμης

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

λωρίδας. Το εμβαδό της είναι βάση × ύψος ή $dA = dr \cdot 2\pi r$ όπου $2\pi r$ είναι το μήκος της λωρίδας (του δακτυλίου). Ο δίσκος είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφ. πυκνότητα φορτίου σ η οποία ορίζεται ως

$$\sigma = \frac{\text{φορτίο}}{\text{εμβαδό}} = \frac{dq}{dA}$$

Επομένως ο δακτύλιος έχει φορτίο dq ίσο με:

$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$. Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα το $d\vec{E}$ που δημιουργεί ένας τέτοιος δακτύλιος σε απόσταση x είναι

$$d\vec{E} = k\, dq \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} = k\sigma\, 2\pi r\, dr \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

κατά την διεύθυνση x. Το ολικό $\vec{E}$ προκύπτει με ολοκλήρωση σε όλο το δίσκο

$$E = \int_{\text{δίσκο}} dE = x k\sigma\pi \int_{r=0}^{R} \frac{2r dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

Όμως το $2rdr$ είναι το διαφορικό του r^2 δηλαδή $dr^2 = 2rdr$. Επίσης στο διαφορικό μπορούμε πάντα να προσθέσουμε μια σταθερά, έτσι $d(r^2+x^2) = dr^2$ (το x είναι σταθερό γιατί δεν μεταβάλλεται όσο ολοκληρώνουμε πάνω στον δίσκο). Με δύο λόγια το ολοκλήρωμα είναι της μορφής

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

$$\int \frac{ds}{s^{3/2}} = \int s^{-3/2}\, ds = \frac{s^{-1/2}}{-1/2} = \frac{-2}{s^{1/2}}$$

όπου $s = x^2 + r^2$. Επομένως

$$E = x k \sigma \pi \left[\frac{-2}{(x^2+r^2)^{1/2}}\right]_{r=0}^{R} \Rightarrow \boxed{E = 2\pi k \sigma x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)}$$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ