Σελ 1

α) Όπως είδαμε στην Μηχανική ισχύει

$$\underbrace{U_A - U_B}_{\text{Δυναμική ενέργεια}} = \underbrace{W_{AB}}_{\text{έργο}} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$\vec{F}$ → Δύναμη του πεδίου πάνω στο φορτίο

Διαιρώντας με το φορτίο q έχουμε:

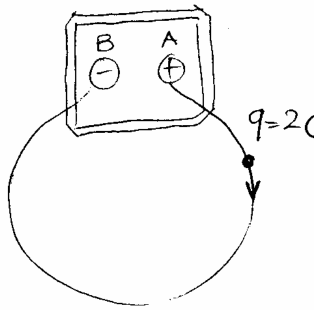
$$\underbrace{V_A - V_B}_{\text{Δυναμικό}} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} \qquad \boxed{1}.$$

$\vec{E}$ → Ένταση του πεδίου

Η Εξίσωση 1 είναι πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό του ωφέλιμου έργου στον ηλεκτρισμό

α) Παράδειγμα: Ένα φορτίο 2 C μεταφέρεται από τον ένα ακροδέκτη μιας πρίζας έως τον άλλον μέσω ενός σύρματος. Πόσο έργο παράχθηκε;

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ



Λύση: Το δυναμικό του δικτύου της Δ.Ε.Η. είναι 220 V. Από την Εξ. 1 έχουμε

$$V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{q} \Rightarrow W_{AB} = q(V_A - V_B) =$$

$$= 2C \cdot 220\,V = 440\ J$$

Άρα το ηλεκτρ. πεδίο παρήγαγε έργο 440 J πάνω στο φορτίο.

Σελ 2

0) Παράδειγμα: Σημειακό φορτίο q. Φέρουμε ένα δεύτερο φορτίο q' από το άπειρο σε απόσταση r από το πρώτο φορτίο. Να υπολογισθούν α) Το έργο που πρέπει να καταβάλλουμε και β) Η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων.

Λύση:

α) Το φορτίο q δημιουργεί δυναμικό στο σημείο P που είναι ίσο με $V=k\frac{q}{r}$. Από την Εξ. 1 έχουμε

$V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{q'}$ όπου W_{AB} το έργο που παράγει η δύναμη λόγω του πεδίου που δημιουργεί το q & της αλληλεπίδρασης του με το q'.

Δ. ΓΟΓΖΟΓΛΗΣ

Το q' παίζει τον ρόλο εδώ του δοκιμαστικού φορτίου για αυτό εμφανίζεται στην σχέση αυτή. Το q δημιουργεί το δυναμικό V.

Εδώ το αρχικό σημείο είναι το ∞ και το τελικό το σημείο P. Έτσι $W_{\infty\to P} = q'(V_\infty - V_P) = q'(0 - k\frac{q}{r}) \Rightarrow$

$$W_{\infty\to P} = -k\frac{qq'}{r}$$

Σελ 3

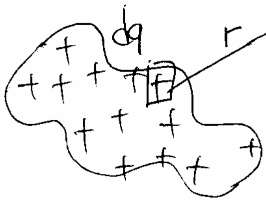
Όπου έχω χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $V(\infty) = k\frac{q}{\infty} \to 0$. Το παραπάνω έργο είναι το έργο που παράγει η δύναμη Coulomb $F = k\frac{qq'}{r^2}$ μεταξύ των δύο φορτίων. Επίσης για να φέρουμε το q' από το ∞ έως το P σε ισορροπία (χωρίς να αποκτήσει ταχύτητα ή να επιταχυνθεί) πρέπει να ασκήσουμε μια ίση και αντίθετη δύναμη με αυτή $\Rightarrow$ το έργο W που πρέπει να ξοδέψουμε είναι το αντίθετο με αυτό που υπολογίσαμε παραπάνω:

$$W = -W_{\infty \to P} = k\frac{qq'}{r}$$

β) Από την Εξ. 1 έχουμε $U_P = q'V_P = q'k\frac{q}{r}$

ή $U_P = k\frac{qq'}{r}$

γ) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ για ΣΥΝΕΧΟΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΦΟΡΤΙΟΥ:



Για να υπολογίσουμε το δυναμικό στο σημείο P χωρίζουμε την κατανομή σε στοιχειώδη φορτία dq που παράγουν δυναμικό

$$dV = k\frac{dq}{r}$$

Δ. Κουζούδης

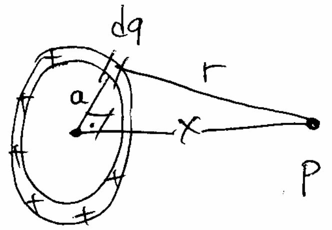
Σελ 4

Το ολικό δυναμικό βρίσκεται με ολοκλήρωση

$$V=\int dV = k\int \frac{dq}{r}$$

→ σε όλη την κατανομή

α) <u>Παράδειγμα:</u> Ομοιόμορφα φορτισμένος λεπτός δακτύλιος με ολικό φορτίο Q και ακτίνα a. Να βρεθεί το δυναμικό σε απόσταση x πάνω στην μεσοκάθετο.



<u>Λύση:</u> Χωρίζουμε τον δακτύλιο σε στοιχειώδη φορτία dq. Έστω r η απόσταση ενός τέτοιου φορτίου dq από το σημείο P.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα $r^2=a^2+x^2 \Rightarrow r=\sqrt{a^2+x^2}$

Αφού τα a και x παραμένουν σταθερά καθώς περιστρεφόμαστε πάνω στον δακτύλιο, τότε και το r παραμένει σταθερό. Το δυναμικό λόγω του dq στο σημείο P είναι $dV = k\frac{dq}{r}$. Ολοκληρώνοντας

$$V=\underbrace{\int dV}_{\text{σε όλο το δακτύλιο}} = k\int\frac{dq}{r}$$

όμως αφού r = σταθερό ⇒ βγαίνει εκτός ολοκληρώματος έτσι:

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

$V = \frac{k}{r}\int dq$

όμως $\int dq = Q$ το ολικό φορτίο στον δακτύλιο.

Έτσι $V = \frac{kQ}{r} = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (2)

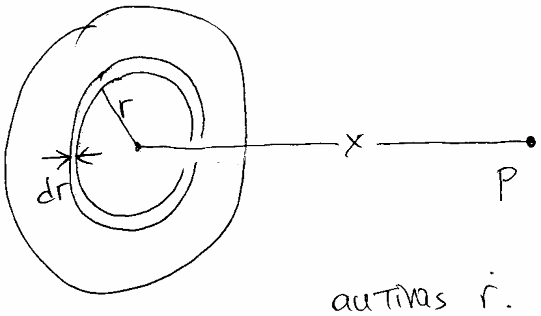
Σημείωση: Εάν μας ζητηθεί να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ στο σημείο P:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} kQ(x^2+a^2)^{-1/2} = \frac{1}{\cancel{2}} kQ (x^2+a^2)^{-3/2} \cancel{2}x$$

έτσι $E_x = \frac{kQ\,x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$ $\qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad E_z = 0$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

ο) παράδειγμα: ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος ακτίνας R και συνολικό φορτίο Q: Να βρεθεί το δυναμικό σε απόσταση x πάνω στην μεσοκάθετο.



Λύση: Για να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος, χωρίζουμε τον δίσκο σε δακτυλίους με απειροστό πάχος dr και ακτίνας r. Για να βρούμε το φορτίο dq που περιέχει αυτός ο δακτύλιος ορίζουμε το σ ως το φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας.

Σελ 6

Έτσι $\sigma = \frac{dq}{dA}$ όπου dA η στοιχειώδης επιφάνεια του δαχτυλιδιού και ισούται με $dA = 2\pi r\,dr$ (δηλαδή μήκος × πλάτος). Έτσι $dq = \sigma dA = 2\pi\sigma r\,dr$.

Από την Εξίσωση 2 του παραπάνω παραδείγματος ξέρουμε ότι το δυναμικό dV που παράγει ο δαχτυλίδιος στο σημείο P είναι:

$$dV = \frac{k\,dq}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{2\pi k\sigma\, r\,dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

. ολοκληρώνοντας σε όλο τον δίσκο.

$$V = \int_{\text{δίσκο}} dV = \pi k\sigma \int \frac{2r\,dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

όμως $2r\,dr = d(r^2)$. Επίσης το x^2 είναι σταθερό και έτσι μπορούμε να το συμπεριλάβουμε στο διαφορικό: $d(r^2) = d(r^2+x^2)$. Έτσι

$$V = \pi k\sigma \int_{\text{δίσκο}} \frac{d(x^2+r^2)}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

. Αλλαγή μεταβλητής. Θέτω $\alpha = x^2 + r^2$

$$V = \pi k\sigma \int_{\text{δίσκο}} \frac{d\alpha}{\alpha^{1/2}} = \pi k\sigma \int_{\text{δίσκο}} \alpha^{-1/2}\,d\alpha = \pi k\sigma\left(-2\alpha^{1/2}\right)$$

ή $V = -2\pi k\sigma \left[\sqrt{x^2+r^2}\right]_{r=0}^{R}$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Σελ 7

$$V = 2\pi k \sigma \left(x - \sqrt{x^2 + R^2} \right)$$

Για να υπολογίσουμε το σ χρησιμοποιούμε το ολικό φορτίο Q και την συνολική επιφάνεια πR^2 του δίσκου

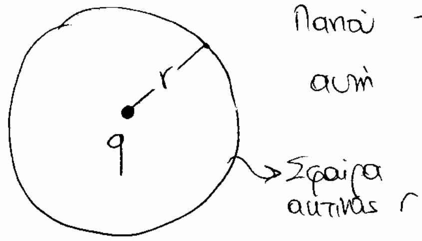
$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} \quad \text{Έτσι} \quad V = \frac{2Qk}{R^2} \left(x - \sqrt{x^2 + R^2} \right)$$

ο) ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ.

Ορισμός: Ισοδυναμική είναι μια επιφάνεια πάνω στην οποία το δυναμικό είναι σταθερό, δηλ $V =$ σταθερό.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Π.χ. οποιαδήποτε ιδεατή σφαίρα με κέντρο ένα σημειακό φορτίο στο κέντρο:



Παντού το δυναμικό στη σφαίρα αυτή είναι $V = k\dfrac{q}{r}$

ο) Θεώρημα: Οι δυναμικές γραμμές του $\vec{E}$ τέμνουν κάθετα τις ισοδυναμικές επιφάνειες του V

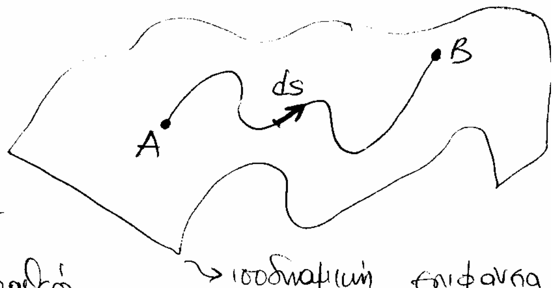
Απόδειξη: Έστω μια τυχαία ισοδυναμική επιφάνεια και έστω μια καμπύλη AB πάνω σε αυτή. Σύμφωνα

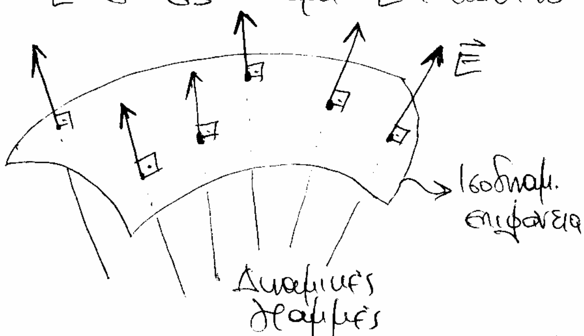
Με την Εξ. 1 έχουμε

Σελ 8

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

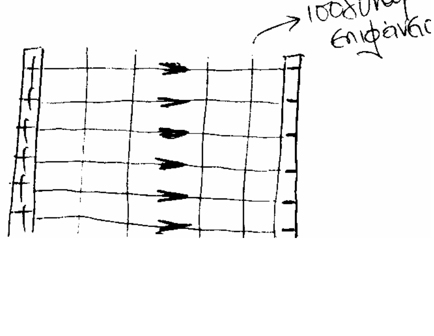
όμως αφού η ΑΒ είναι πάνω σε ισοδυναμική επιφάνεια τότε $V_A = V_B = V$: σταθερό. Έτσι $\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s} = 0$. Αυτό όμως συμβαίνει για οποιαδήποτε διαδρομή ΑΒ πάνω στην επιφάνεια, οσοδήποτε μικρή η μεγάλη, τυχαίου σχήματος. Από αυτό συνάγεται ότι $\vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$. Εάν δεχθούμε ότι υπάρχει ηλεκτρ. πεδίο οπότε $\vec{E} \neq 0$ τότε αναγκαστικά $\vec{E} \perp d\vec{s}$ άρα $\vec{E}$: κάθετο στην επιφάνεια:





τ) <u>Παράδειγμα</u>:

Το ομογενές πεδίο $\vec{E}$ ανάμεσα στους οπλισμούς ενός πυκνωτή είναι οριζόντιο. Οι ισοδυναμικές γραμμές είναι επίπεδα παράλληλα με τις πλάκες του πυκνωτή:



Δ. Κουζούδης

σ) <u>Ορισμός πυκνωτή:</u> (Σελ 9).

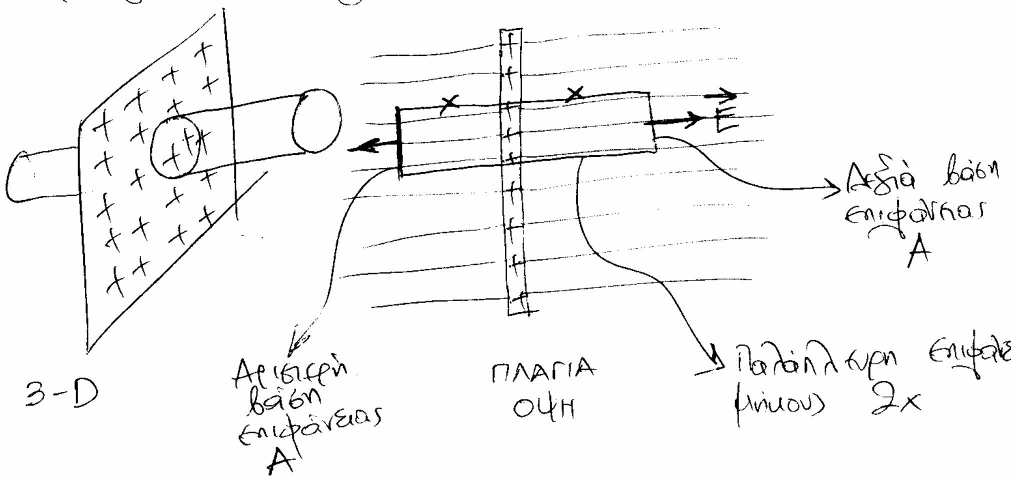
Δυο αγωγοί φορτισμένοι με αντίθετα φορτία +Q και −Q που βρίσκονται σε διαφορά δυναμικού ΔV. Η χωρητικότητα C του πυκνωτή ορίζεται ως

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

σ) Υπολογισμός του C για πυκνωτή αποτελούμενου από επίπεδες πλάκες, φορτίου ±Q η καθεμία και επιφάνειας A.

<u>Λύση</u>: Ορίζουμε το $\sigma = \frac{\pm Q}{A}$ για την κάθε πλάκα. Πρώτα θα βρούμε το ηλεκ. πεδίο $\vec{E}$ που δημιουργεί η θετική πλάκα. Ξέρουμε ότι το $\vec{E}$ είναι ομογενές: Διαλέγω μια κυλινδρική επιφάνεια Gauss:

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ



Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss. Σελ 10

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{\Delta} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{A} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

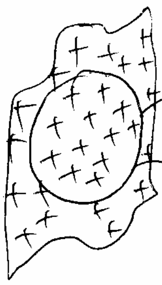
Δεξιά βάση   Αριστερή βάση   Παράπλευρη

Όμως στην παράπλευρη επιφάνεια $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι κάθετα και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A}=0$. Αντίστοιχα στις βάσεις $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA$. Το E είναι σταθερό στις βάσεις και έτσι βγαίνει εκτός ολοκληρώματος:

$$E_{\Delta}\int dA + E_{A}\int dA = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{\Delta} A + E_{A} A = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Λόγω συμμετρίας $E_A = E_\Delta = E$ και έτσι

$E = \frac{q}{2\epsilon_0 A}$. Όμως το q είναι το περικλειόμενο φορτίο από τον κύλινδρο.



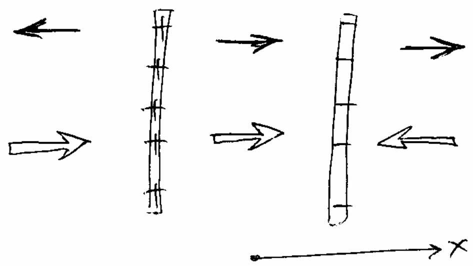
Έτσι $\frac{q}{A} = \sigma$ η επιφ. πυκνότητα φορτίου της πλάκας. Επομένως για ένα οπλισμό

$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ανεξάρτητο της απόστασης !!!

Δ. Κουζούδης

Σελ 11

Βάζουμε τώρα τις δύο πλάκες μαζί. Με τα μαύρα βέλη είναι το $\vec{E}$ λόγω της θετικής πλάκας ενώ τα άσπρα λόγω της αρνητικής:



Παρατηρούμε ότι έξω από τον πυκνωτή τα $\vec{E}$ αλληλοαναιρούνται. Μέσα προστίθενται ως έτσι

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

ένταση ηλεκτρ. πεδίου στο εσωτερικό πυκνωτή.

Εάν οι πλάκες έχουν φορτίο Q και εμβαδό A τότε $E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$.

Για να βρούμε την σχέση της διαφοράς δυναμικού ΔV του πυκνωτή με το E χρησιμοποιούμε την Εξ 1:

$$V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_+^- E\,dx = E\int_+^- dx \Rightarrow$$

$\Delta V = E d$ όπου d η απόσταση των οπλισμών.

Έτσι $\Delta V = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d$ και η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι $C = \frac{Q}{\Delta V}$ ή $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ