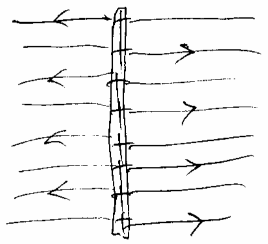
·) <u>Χωρητικότητα</u> μεταξύ δυο αντίθετα φορτισμένων αγωγών: Σελ 1

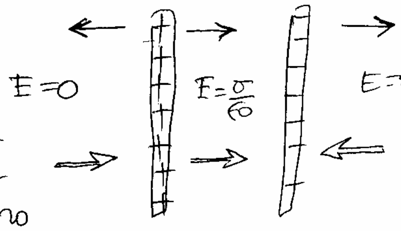
$C=\frac{Q}{V}$ Q: φορτίο ενός αγωγού
V: η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους

ο) Επίπεδος πυκνωτής.

Είδαμε ότι μια επίπεδη πλάκα ομοιόμορφα φορτισμένη με σ φορτίο/επιφάνεια παράγει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως $E=\frac{\sigma}{2\epsilon}$:



Εαν τοποθετήσουμε δυο τέτοιες πλάκες με αντίθετο φορτίο τότε το



$\vec{E}$ αλληλοαναιρείται στον εκτός χώρο και συμβάλλει στον εντός: $E=\frac{\sigma}{2\epsilon}+\frac{\sigma}{2\epsilon}=\frac{\sigma}{\epsilon}$: Αυτό είναι το ηλεκτρικό πεδίο πυκνωτή με επίπεδη επιφάνεια.

Εαν για παράδειγμα το φορτίο της πλάκας είναι Q και το εμβαδό της είναι A τότε $\sigma=\frac{Q}{A}$ και $E=\frac{Q}{\epsilon A}$.

Όπως είδαμε $E=-\frac{dV}{dx} \rightsquigarrow V=-\int E\,dx \rightsquigarrow V=V(0)-\frac{Q}{\epsilon A}x$

όπου x η απόσταση από την θετική πλάκα. Εαν οι πλάκες έχουν απόσταση d τότε $V(d)=V(0)-\frac{Q}{\epsilon A}d$ οπότε η διαφορά δυναμικού είναι $V=V(0)-V(d)=\frac{Q}{\epsilon A}d$

Έτσι η χωρητικότητα είναι

Σελ 2

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

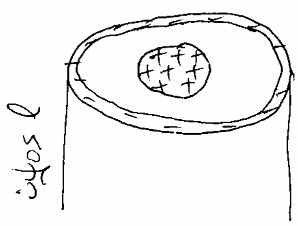
α) Παράδειγμα. Για επίπεδο πυκνωτή $A = 2cm^2$ με $d = 1mm$ η χωρητικότητα ισούται με

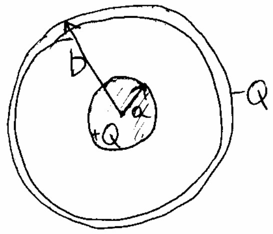
$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \left(8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}\right) \frac{2\times10^{-4}\, m^2}{1\times10^{-3}\, m} = 1{,}77 \times 10^{-12}\, \frac{C}{V}$$

Ορίζουμε ως μονάδα χωρητικότητας το 1 Farad ~~Η μονάδα (F) που είναι η μονάδα χωρητ~~ το οποίο ισούται με 1 Coulomb ανά 1 Volt: $F = \frac{C}{V}$

Έτσι $C = 1{,}77 \times 10^{-12}$ F

β) κυλινδρικός πυκνωτής:

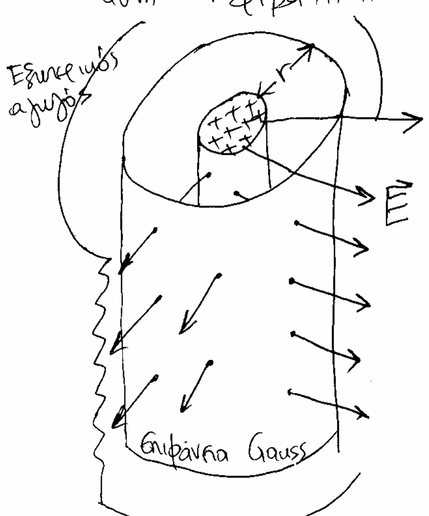




Αποτελείται από ένα κεντρικό αγωγό φορτίου Q, ακτίνας a και μήκους ℓ ο οποίος περιβάλλεται από ένα κοίλο κυλινδρικό αγωγό ίδιου μήκους, ακτίνας b και φορτίου −Q. Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του

Κατά αρχάς πρέπει να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο λόγω συμμετρίας είναι ακτινικό. Διαλέγουμε μια κυλινδρ. επιφάνεια Gauss με ακτίνα r ώστε $a<r<b$. Η επιφάνεια αυτή περιβάλλει τον εσωτερικό αγωγό:

Σει 3



Ο νόμος του Gauss δίνει

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

στις βάσεις του κυλίνδρου τα $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι κάθετα $\Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{A}=0$. Αντίθετα στην παράπλευρη $\vec{E}\parallel d\vec{A} \Rightarrow$ $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA\cos\cancel{\theta}^{0} = E\,dA$. Έτσι

$$\int_{\text{παράπλευρη}} E\,dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Το E λόγω συμμετρίας είναι σταθερό πάνω στην επιφάνεια Gauss οπότε βγαίνει εκτός ολοκληρώματος. Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας είναι $A=2\pi r l$ και έτσι

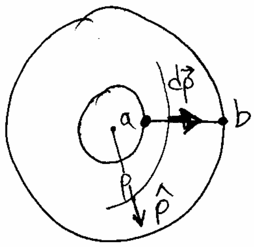
$$E\int dA = EA = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E\,2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l r}$$

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε την διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών. Όπως είδαμε όταν γνωρίζουμε το $\vec{E}$ η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων a και b δίνεται από την:

Σελ 4

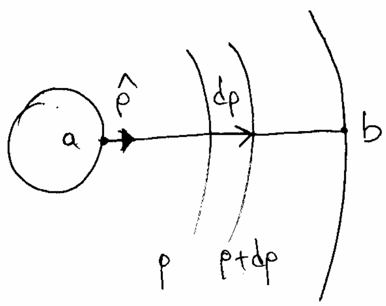
$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι πάνω σε μια οποιαΔΗΠΟΤΕ διαδρομή που συνδέει τα a και b. Εφόσον οι αγωγοί είναι ισοδυναμικές επιφάνειες, μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε σημείο a πάνω στον θετικό αγωγό και οποιοδήποτε σημείο b πάνω στον αρνητικό αγωγό. Έτσι διαλέγουμε τα a και b πάνω σε μια ακτίνα:



Σε κυλινδρικές συντεταγμένες το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}$

όπου $\hat{\rho}$ το μοναδιαίο κατά την κατεύθυνση της ακτίνας. Πάνω στην διαδρομή $a \to b$ το διάνυσμα που είναι παράλληλο σε αυτήν και ίσο με το στοιχειώδες της μήκος είναι το $d\vec{s} = d\vec{\rho} = d\rho\,\hat{\rho}$



Έτσι

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}\cdot d\rho\,\hat{\rho}$$

όμως $\hat{\rho}\cdot\hat{\rho} = 1$ και έτσι

$$V = V_a - V_b = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{\rho_b}{\rho_a}$$

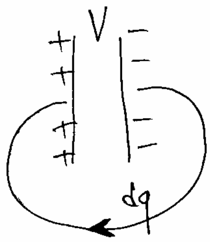
Επομένως η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(\rho_b/\rho_a)}$$

α) Ενέργεια πυκνωτή

Σελ 5

Για να υπολογίσουμε την ενέργεια του πυκνωτή, υπολογίζουμε την ενέργεια που ξοδεύουμε για να τον φορτίσουμε από αρχική τάση $V=0$ εως τελική τάση V_1.



Κατά την διάρκεια της φόρτισης η τάση βρίσκεται σε ενδιάμεση τιμή V. Για να φορτίσουμε τον πυκνωτή μεταφέρουμε φορτίο dq από τον αρνητικό οπλισμό προς τον θετικό. Το φορτίο βλέπει να μεταβάλλεται η δυναμική του ενέργεια αφού όπως είδαμε η σχέση δυν. ενέργειας με δυναμικό είναι $U_+ - U_- = q(V_+ - V_-)$ εδώ το q είναι το dq και $V_+ - V_- = V$ η διαφορά δυναμ. του πυκνωτή. Άρα εμείς πρέπει να παράγουμε έργο ίσο και αντίθετο με το έργο του πεδίου $W_{\ominus \to \oplus} = U_- - U_+ = dq(V_- - V_+) = -dqV$

Το έργο αυτό dqV αποθηκεύεται στον πυκνωτή. Από τον ορισμό της χωρητικότητας $C = \frac{q}{V} \Rightarrow V = \frac{q}{C}$ όπου q το φορτίο του πυκνωτή σε κάθε χρονική στιγμή. Έτσι

$dE = dqV = \frac{1}{C} q\, dq$: στοιχ. ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή κατά την μετακίνηση του στοιχ. φορτίου dq μεταξύ των οπλισμών υπό τάση V

Σελ 6

Ολοκληρώνοντας

$$E = \int dE = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$ όπου Q είναι το

τελικό φορτίο που δίνεται από την $C = \frac{Q}{V_1} \Rightarrow Q = CV_1$

Επομένως $E = \frac{1}{2} C V_1^2$