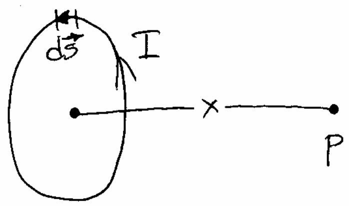
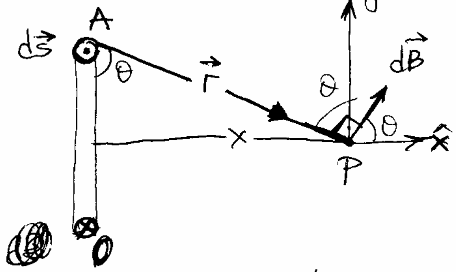
α) Μαγνητικό πεδίο δακτυλίου.

Έστω κυκλικός δακτύλιος ακτίνας R που διαρρέεται από ρεύμα I. Να βρεθεί η ένταση του μαγνητ. πεδίου $\vec{B}$ σε απόσταση x από την μεσοκάθετο του δακτυλίου



3-D



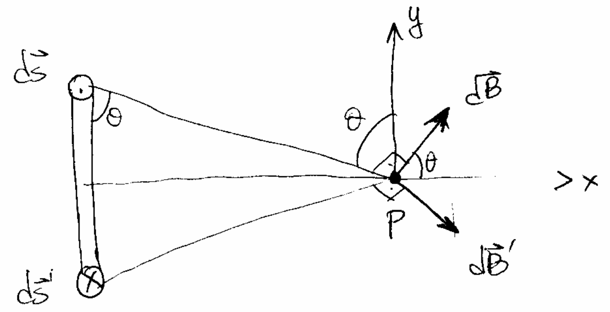
ΠΛΑΓΙΑ ΟΨΗ

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Biot-Savart:

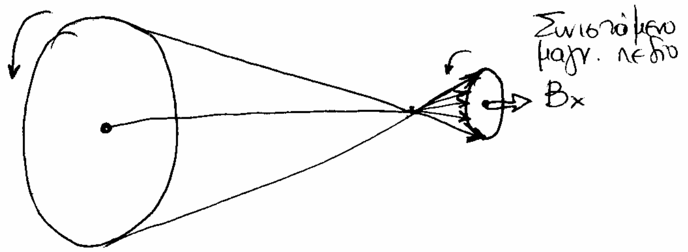
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

Εξετάζουμε πρώτα το στοιχειώδες μήκος ds που βρίσκεται στο υψηλότερο μέρος του δακτυλίου στο σημείο A. Στην πλάγια όψη το $d\vec{s}$ βγαίνει εκτός της σελίδας. Το $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης $\vec{AP}$. Το $d\vec{B}$ είναι κάθετο και στο $\vec{r}$ και στο $d\vec{s}$ και έτσι έχει την διεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα. Το $d\vec{B}$ είναι μέσα στην σελίδα με διεύθυνση κάθετη στο $\vec{r}$. Επειδή τα $\vec{r}$ και $d\vec{s}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο του $d\vec{s}\times\vec{r}$ είναι απλά $ds \cdot r$ και έτσι $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds\, r}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{r^2}$. Τώρα θα εξετάσουμε τον συνδυασμό των $d\vec{B}$ που δημιουργούνται από το $d\vec{s}$ στο A και το $d\vec{s}'$ στο σημείο Γ (στο χαμηλότερο σημείο του δακτυλίου):



Φαίνεται ότι τα $d\vec{B}$ και $d\vec{B}'$ έχουν αντίθετες y συνιστώσες ενώ οι x συνιστώσες αθροίζονται. Έτσι ~~[illegible]~~ εαν πάρουμε όλα τα αντιδιαμετρικά σημεία στον δακτύλιο, παράγουν λόγω συμμετρίας μόνο x συνιστώσα στο σημείο P.
Έτσι θα ολοκληρώσουμε μόνο την x-συνιστώσα

$dB_x = dB\cos\theta = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{ds}{r^2}\cos\theta$ πάνω σε όλο τον δακτύλιο:



$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{ds}{r^2}\cos\theta$$

Το r και θ δεν μεταβάλλονται όσο ολοκληρώνουμε πάνω στον δακτύλιο. Έτσι βγαίνουν εκτός ολοκληρώματος

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}\int ds$$

Το συνολικό μήκος $\int ds$ του δακτυλίου είναι ίσο με την περίμετρο του $2\pi R$. Έτσι:

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{\cancel{4}\pi}\,\frac{\cos\theta}{r^2}\,\cancel{2\pi} R = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{\cos\theta}{r^2}\,R$$

Τέλος εκφράζουμε τα r και θ συναρτήσει των δεδομένων x και R: $r^2 = x^2 + R^2$

$\cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$ και έτσι $B_x = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$

<u>Οριακές περιπτώσεις</u>: Στο κέντρο του δακτυλίου $x=0$

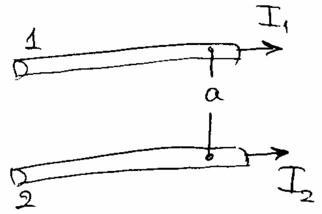
$B_x = \frac{\mu_0 I}{2R}$. Για μεγάλα $x \gg R$ $(x^2+R^2)^{3/2} \simeq (x^2)^{3/2} = x^3$

και έτσι $B_x = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{R^2}{x^3}$

Δ. Κουζούδης

δ) Μαγνητική δύναμη ανάμεσα σε δύο παράλληλους αγωγούς.

Έστω δύο αγωγοί σε απόσταση a οι οποίοι διαρρέονται από ρεύματα I_1 και I_2 αντίστοιχα. Πόση είναι η δύναμη μεταξύ τους;

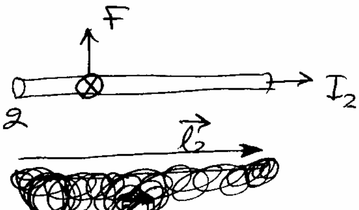


<u>Λύση</u>: Όπως ξέρουμε το μαγνητικό πεδίο που παράγει ένας αγωγός σε απόσταση r δίνεται από την

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Έτσι ο αγωγός 1 παράγει ένα πεδίο επομένως

$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$ στην περιοχή του αγωγού 2. Το $\vec{B}_1$ βρίσκεται πάνω σε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο τον αγωγό 1 και έτσι τέμνει τον αγωγό 2 κάθετα.

Ο αγωγός 2 διαρρέεται από ρεύμα I_2 και βρίσκεται μέσα σε μαγν. πεδίο $\vec{B}_1$. Επομένως ασκείται επάνω του δύναμη



$\vec{F} = I_2 \vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1$ όπου $\vec{\ell}_2$ το διάνυσμα μήκους του αγωγού 2, παράλληλο με το ρεύμα I_2.

Αφού τα $\vec{\ell}_2$ και τα $\vec{B}_1$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της δύναμης είναι $F = I_2 \ell_2 B_1 = I_2 \ell_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$.

Συνήθως μας ενδιαφέρει η δύναμη ανά μονάδα μήκους των αγωγών.

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{a}$$ όπου $\ell = \ell_2$ το κοινό τους μήκος.

Εάν πάρουμε υπόψη την φορά των δυνάμεων εύκολα βλέπουμε ότι

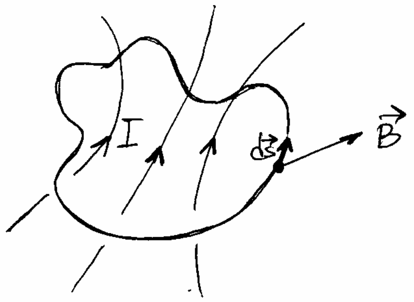
{ Ομόρροπα ρεύματα έλκονται
{ Αντίρροπα -//- απωθούνται

α) Ο <u>ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ AMPERE.</u>

Ο νόμος του Ampere είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$. Ο νόμος λέει ότι το ολοκλήρωμα $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ πάνω σε μια κλειστή καμπύλη η οποία περιχαράσσεται από τα στοιχειώδες μήκος $d\vec{s}$, ισούται με μ_0 επί I, όπου I είναι το

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

συνολικό ρεύμα I που περικλείει η καμπύλη:



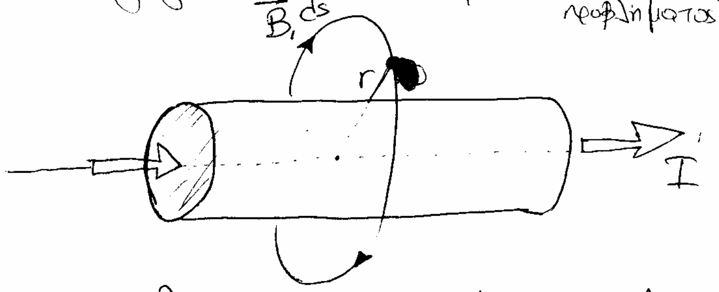
c) Παράδειγμα:

Μαγνητ. πεδίο ευθύγραμμου αγωγού ακτίνας R που διαρρέεται από ρεύμα I. Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο εκτός και εντός του αγωγού.

Δ. Κουζούδης

Εντός:

Λόγω συμμετρίας περιμένουμε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ να βρίσκεται πάνω σε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο πάνω στον άξονα του αγωγού. (Εάν αυτό δεν είναι προφανές δες σημείωση στο τέλος του προβλήματος)



Διαλέγουμε ως καμπύλη για τον νόμο του Ampere έναν τέτοιο ομόκεντρο κύκλο ακτίνας $r>R$. Πάνω το $\vec{B}$ είναι παράλληλο με το στοιχειώδες μήκος $d\vec{s}$ και έτσι το εσωτερικό γινόμενο $\vec{B}\cdot d\vec{s}$ γίνεται απλό γινόμενο των μέτρων: Bds

Η καμπύλη περικλείει όλο το ρεύμα I
του αγωγού και έτσι μπορούμε να γράψουμε τον νόμο του Ampere ως

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow \oint B ds = \mu_0 I$$

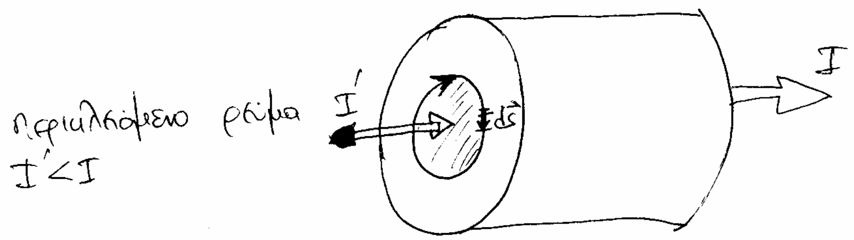
Λόγω συμμετρίας το B είναι σταθερό παντού πάνω στον κύκλο και έτσι βγαίνει εκτός ολοκληρώματος:

$$B \oint ds = \mu_0 I$$

Το $\oint ds$ είναι το συνολικό μήκος του κύκλου $2\pi r$. Έτσι

$$B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

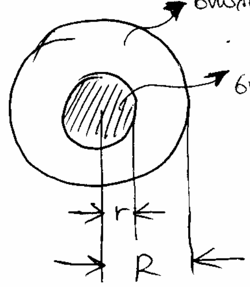
Εντός:
Τώρα διαλέγουμε ένα κύκλο ακτίνας $r<R$:



Η ανάλυση είναι ακριβώς η ίδια όπως προηγουμένως αλλά το ρεύμα I' που περικλείει η καμπύλη είναι μικρότερο από το συνολικό ρεύμα. Για να υπολογίσουμε το I' σκεφτόμαστε ως εξής: Υποθέτουμε ότι το

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

ρεύμα κατανέμεται ομοιόμορφα στην διατομή (7)
του αγωγού, έτσι μπορούμε να πούμε ότι η αναλογία των ρευμάτων ισούται με την αναλογία των επιφανειών:



συνολικό ρεύμα I, συνολική επιφάνεια πR^2

εσωτερικό ρεύμα I', εσωτερική επιφάνεια πr^2

Έτσι $\dfrac{I'}{I} = \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} = \dfrac{r^2}{R^2} \Rightarrow$

$$I' = \frac{r^2}{R^2} I'.$$ Αντικαθιστώντας

στον νόμο του Ampere έχουμε

$$B' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{r^2}{R^2} I \Rightarrow B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

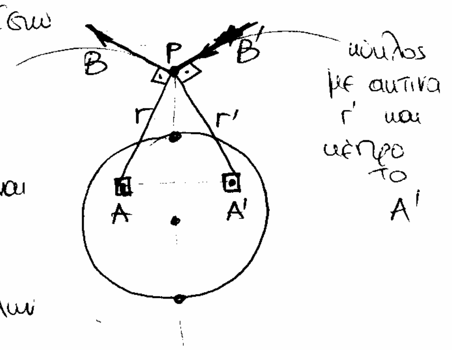
Συνοψίζοντας:

Ένταση μαγν. πεδίου: $$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r \geq R \\ \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & r < R \end{cases}$$

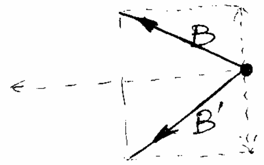
<u>Σημείωση:</u> Γιατί το $\vec{B}$ βρίσκεται σε ομόκεντρους κύκλους; Γνωρίζουμε ότι αυτό ισχύει για ευθύγραμμο αγωγό μηδενικής ακτίνας (απλή γραμμή) όμως ισχύει και για αγωγό πεπερασμένης ακτίνας R; Για να το δούμε αυτό χωρίζουμε τον αγωγό σε ένα άπειρο πλήθος

Δ. Κουζούδης

απειροστών αγωγών για τους οποίους ισχύει η ιδέα των ομόκεντρων κύκλων. Έστω δυο τέτοιοι αγωγοί A και A'. Τα αντίστοιχα μαγνητικά πεδία B και B' που παράγουν στο σημείο P είναι κάθετα στις ακτίνες r και r' των αντίστοιχων ομόκεντρων κύκλων γύρω από το A και A' αντίστοιχα.



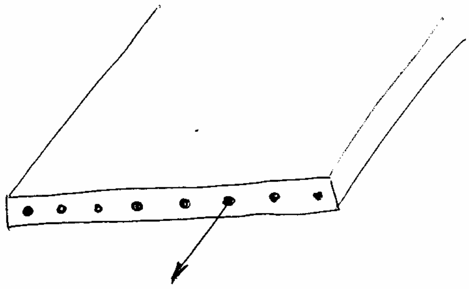
Εαν διαλέξουμε τα A και A' να βρίσκονται συμμετρικά εκατέρωθεν της κατακόρυφης διαμέτρου, αλλά και το P πάνω στη διάμετρο, τότε τα B και B' είναι ίσα (γιατί $r=r'$) και η κατακόρυφη συνιστώσα τους αλληλοαναιρείται ενώ η οριζόντια αθροίζεται.

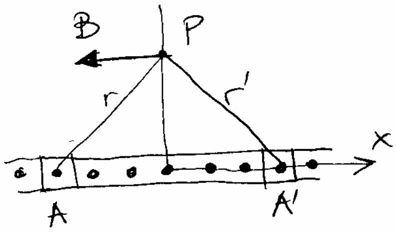


Έτσι εαν πάρουμε όλους τους στοιχειώδεις αγωγούς ανά ζεύγη, το $\vec{B}$ βγαίνει οριζόντιο στο P. Λόγω συμμετρίας μπορούμε να κάνουμε την ίδια ανάλυση σε οποιοδήποτε σημείο P γύρω από τον αγωγό και πάντα το αποτέλεσμα θα είναι το $\vec{B}$ κάθετο στην διάμετρο του αγωγού $\Rightarrow$ το $\vec{B}$ βρίσκεται πάνω σε ομόκεντρους κύκλους γύρω από τον αγωγό.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

σ) Φύλλο άπειρων διαστάσεων που διαρρέεται από ρεύμα. Να υπολογισθεί το $\vec{B}$ (9)



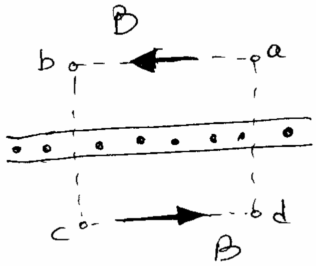


<u>Λύση</u>: Επειδή το φύλλο είναι απείρων διαστάσεων δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για το συνολικό ρεύμα (αφού είναι άπειρο) αλλά για το ρεύμα ανά μονάδα μήκους στον άξονα των x. Οπότε ορίζουμε $j = \frac{dI}{dx}$ $\frac{\text{ρεύμα}}{\text{μήκος}}$.

Χ. ΚΟΥΖΟΥΧΗΣ

Κόβουμε το φύλλο σε απειροστούς αγωγούς όπως οι A και A' στο σχήμα. Δουλεύοντας σε ζεύγη αγωγών όπως στο παραπάνω παράδειγμα, το $\vec{B}$ βγαίνει παράλληλο με την επιφάνεια του φύλλου, προς την $-\hat{x}$ διεύθυνση πάνω από το φύλλο και προς την $+\hat{x}$ διεύθυνση κάτω από το φύλλο:

Διαλέγουμε ένα ορθογώνιο πλαίσιο ως καμπύλη για την εφαρμογή του νόμου του Ampere.



Τότε έχουμε

$$\oint_{abcd} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

όπου I το συνολικό ρεύμα που περικλείει η καμπύλη abcd.

Χωρίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε επιμέρους ολοκληρώματα πάνω στα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα ab, bc, cd και da:

$$\int_{ab} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_{bc} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_{cd} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_{da} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

Δ. Κουζούδης

Στα τμήματα bc και ad το $\vec{B}$ είναι κάθετο στην διαδρομή οπότε $\vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$

Στα άλλα δύο τμήματα το $\vec{B}$ και $d\vec{s}$ είναι παράλληλα οπότε $\vec{B}\cdot d\vec{s} = Bds$. Οπότε

$$\int_{ab} Bds + \int_{cd} Bds = \mu_0 I.$$

Λόγω συμμετρίας το B είναι σταθερό πάνω στο ab και στο cd και έτσι βγαίνει εκτός ολοκληρώματος:

$$B\int_{ab} ds + B\int_{cd} ds = \mu_0 I$$

(Έχουμε πάρει το ίδιο $\vec{B}$ πάνω και κάτω γιατί έχουμε διαλέξει την καμπύλη έτσι ώστε τα ab και cd να ισαπέχουν από το φύλλο.) Έχω ότι το μήκος ab και cd ισούται με ℓ. Τότε

$$B\ell + B\ell = \mu_0 I \Rightarrow 2B\ell = \mu_0 I$$

Το ρεύμα που περικλύεται από την καμπύλη ισούται με $I = j\ell$ αφού το j είναι το ρεύμα ανά μονάδα μήκους. Έτσι $2B\ell = \mu_0 j \ell \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 j}{2}}$.

Δ. ΓΟΥΖΟΥΔΗΣ