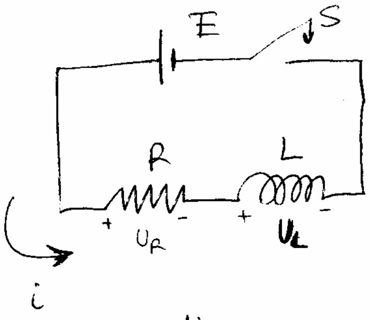
α) Αύξηση ρεύματος σε κύκλωμα R-L



Έστω ότι την χρονική στιγμή $t=0$ το ρεύμα $i=0$ και κλείνει ο διακόπτης S. Να βρεθεί μια έκφραση $i = i(t)$

Λύση:

Εφαρμόζουμε τον νόμο τάσεων του Kirchhoff:

$E - U_R - U_C = 0$ (με τις πολικότητες που φαίνονται στο σχήμα).

Ως γνωστό η τάση της αντίστασης U_R εξαρτάται από το ρεύμα $U_R = i \cdot R$ (νόμος του Ohm)

Η αντίστοιχη εξίσωση για το πηνίο είναι η $U_L = L \cdot \frac{di}{dt}$. Δηλαδή η U_L είναι ανάλογη με την παράγωγο του i ως προς τον χρόνο. Έτσι όταν αυξάνεται το ρεύμα i, η U_L αυξάνεται επίσης για να ~~αντισ~~ αντισταθεί στην E (το αίτιο που προκαλεί την αύξηση του i) που είναι ο νόμος του Lenz.

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Έτσι έχουμε

$$\mathcal{E} - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\mathcal{E}}{L}} \quad \boxed{1}$$

Η παραπάνω είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση 1ου βαθμού ως προς i με σταθερούς συντελεστές. Θεωρούμε ότι η τάση της μπαταρίας $\mathcal{E}$ είναι σταθερή.

Από την θεωρία των διαφορικών εξισώσεων γνωρίζουμε ότι η πλήρης λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι ίση με το άθροισμα της λύσης της ομογενούς εξίσωσης συν μια μερική λύση της μη ομογενούς.

$$i = i_{ομογενούς} + i_{μη-ομογενούς}$$

α) Λύση ομογενούς:
η ομογενής εξίσωση είναι αυτή που στο δεξί μέλος έχει 0 δηλαδή:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \Rightarrow \quad (\text{ομογενής διαφ. εξίσωση})$$

$$\boxed{\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i} \quad \boxed{2}$$

Δηλαδή εάν παραγωγίσουμε το ρεύμα μια φορά ως προς το χρόνο μας δίνει μια σταθερά επί μείον τον εαυτό του. Ποια συνάρτηση έχει αυτήν την ιδιότητα;

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Εάν το σκεφτούμε λίγο, η συνάρτηση αυτή είναι η κατάλληλη $i = i_0 e^{-\alpha t}$ i_0, α : σταθερές

Πράγματι $\frac{di}{dt} = -\alpha i_0 e^{-\alpha t} = -\alpha i$

Συγκρίνοντας με την παραπάνω εξίσωση 2 έχουμε

$\alpha = \frac{R}{L}$ και έτσι η λύση της ομογενούς είναι:

$$\boxed{i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$

λύση της ομογενούς διαφ. εξίσωσης

β) Μερική λύση της μη ομογενούς

Ζητάμε μια οποιαδήποτε μερική (ειδική) λύση της μη ομογενούς διαφ. εξίσωσης

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$$

Δοκιμάζουμε για ευκολία $i = c$: σταθερά

τότε $\frac{di}{dt} = 0$ και $\frac{R}{L} c = \frac{E}{L} \Rightarrow \boxed{c = \frac{E}{R}}$

Άρα $\boxed{i = \frac{E}{R}}$ σταθερά, είναι μια ειδική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η γενική λύση είναι το άθροισμα των δύο παραπάνω λύσεων: (4)

$$i = \frac{E}{R} + i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

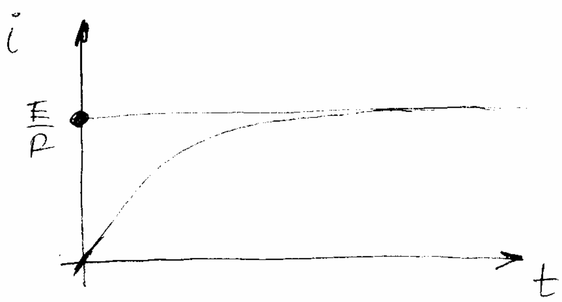
Για να βρούμε την σταθερά i_0, εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη ότι για $t=0$ το ρεύμα ήταν μηδέν, δηλαδή $i(0)=0$:

$$i(0) = \frac{E}{R} + i_0 e^{0} = 0 \Rightarrow \frac{E}{R} + i_0 = 0 \Rightarrow i_0 = -\frac{E}{R}$$

Επομένως η πλήρης λύση είναι:

$$\boxed{i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

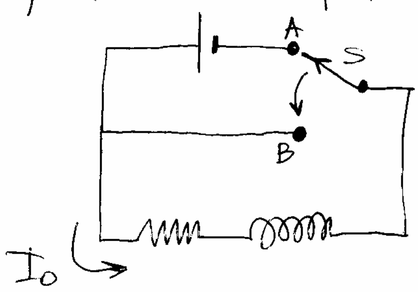
Δ ΤΟΥΖΟΥΛΗΣ



Η γραφική παράσταση της $i(t)$ δείχνει ότι ενώ αρχικά $i=0$, το ρεύμα αυξάνει γρήγορα αλλά αργότερα φτάνει σε κορεσμό, στην τιμή $i=\frac{E}{R}$ που είναι ο νόμος του Ohm εάν το πηνίο ήταν απών. Επομένως σε σταθερές τάσεις E, το (5) πηνίο μετά από αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα συμπεριφέρεται ως βραχυκύκλωμα! Είναι σαν να μην υπάρχει στο κύκλωμα!

Πόσο γρήγορα φτάνει το ρεύμα $i(t)$ στον κορεσμό; Στον κορεσμό ο όρος $e^{-\frac{R}{L}t}$ τείνει στο μηδέν. Αυτό γίνεται πιο γρήγορα όταν η σταθερά $\frac{R}{L}$ είναι μεγάλη. Ορίζουμε ως τ την ποσότητα $\tau = \frac{L}{R}$ και την ονομάζουμε σταθερά χρόνου του κυκλώματος RL. Η πρακτική της σημασία έγκειται στο ότι μετά από 5 περίπου σταθερές χρόνου, το ρεύμα έχει φτάσει στο 99% του ρεύματος κορεσμού, είναι δηλαδή πρακτικώς $i \simeq \frac{E}{R}$.

δ) Μείωση του ρεύματος σε κύκλωμα RL

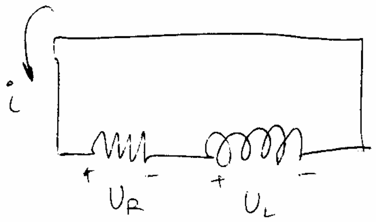


Αφού έχουμε αποκτήσει ένα ρεύμα κορεσμού I_o στο διπλανό κύκλωμα με το διακόπτη S στην θέση A, τον αλλάζουμε θέση στο B. Να δοθεί μια

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

έκφραση για το ρεύμα του κυκλώματος $i = i(t)$.

Λύση: Την χρονική στιγμή $t=0$ ο διακόπτης S αλλάζει θέση και το κύκλωμα γίνεται:



Εφαρμόζοντας τον νόμο των τάσεων του Kirchhoff όπως προηγουμένως έχουμε

$$0 - U_R - U_L = 0 \Rightarrow$$

$$-iR - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0}$$

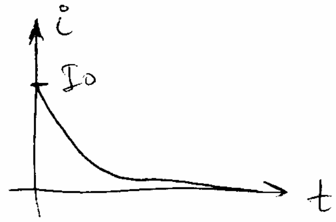
Τώρα έχουμε μια την φυσική εξίσωση οπότε γνωρίζουμε την λύση της από το προηγούμενο παράδειγμα: $i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ όπου i_0 = σταθερά.

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη ότι $i = I_0$ για $t=0$ έχουμε $i(0) = i_0 e^{0} = I_0 \Rightarrow i_0 = I_0$ έτσι

$$\boxed{i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$

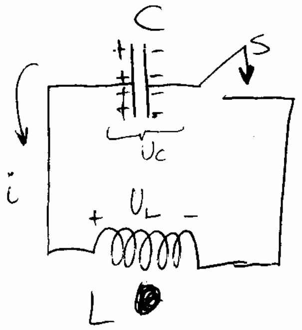
Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Η γραφική παράσταση του $i(t)$ φαίνεται παρακάτω: (7)



Τώρα το ρεύμα φθίνει εκθετικά με τον χρόνο και πρακτικώς σε χρόνο $t = 5\tau = 5\frac{L}{R}$ έχει πέσει στο 1% της τιμής του.

δ) Κύκλωμα L-C.



Φορτίζουμε ένα πυκνωτή σε φορτίο Q. Την χρονική στιγμή $t=0$ κλείνουμε τον διακόπτη. Να βρεθεί μια έκφραση για το ρεύμα $i(t)$ του κυκλώματος και το φορτίο $q(t)$ του πυκνωτή.

Λύση: Εφαρμόζουμε τον νόμο των τάσεων του Kirchhoff: $U_C - U_L = 0$

Η τάση του πυκνωτή συνδέεται με το φορτίο του από την σχέση $U_C = \frac{q}{C}$ ενώ όπως είδαμε παραπάνω η τάση του πηνίου είναι $U_L = L\frac{di}{dt}$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Επομένως

$$\boxed{\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0.} \quad (1)$$

Εδώ έχουμε δύο μεταβλητές, το q και το i. Πρέπει να βρούμε μια έκφραση που να τις συνδέει.

Ως γνωστό το ρεύμα ισούται με την μεταβολή του φορτίου ως προς τον χρόνο, δηλαδή

$i = \frac{dq'}{dt}$ όπου q' είναι το φορτίο που ρέει στο κύκλωμα ενώ q είναι το φορτίο του πυκνωτή. Είναι εύκολο να δούμε ότι εάν στην διάρκεια του χρόνου dt, το φορτίο του πυκνωτή ελαττωθεί κατά dq, τότε το φορτίο του κυκλώματος αυξάνει κατά dq οπότε

$dq' = -dq \Rightarrow i = \frac{dq'}{dt} = -\frac{dq}{dt}$ (θα είχαμε + εάν η φορά του ρεύματος ήτανε αντίθετη)

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Επομένως η εξίσωση 1 γίνεται

$$\frac{q}{C} - L\frac{d}{dt}\left(-\frac{dq}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

Αυτή είναι μια ομογενής Δ.Ε. δευτέρου τάξης. Για να την λύσουμε την γράφουμε ως εξής:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}\,q} \quad \boxed{2}$$

Δηλαδή εάν παραγωγίσουμε δύο φορές την συνάρτηση $q(t)$ μας δίνει μείον (−) τον εαυτό της επί μια σταθερά.

Από τα Μαθηματικά γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου έχουν τέτοιες ιδιότητες οπότε δοκιμάζουμε σαν λύση την

$$q = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

όπου A, B, ω: σταθερές που πρέπει να προσδιορισθούν

Παραγωγίζοντας.

$$\frac{dq}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 q$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω με την $\boxed{2}$ έχουμε:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

(συχνότητα ταλαντώσεων του κυκλώματος)

Οι σταθερές A και B προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος

Δ. ΓΟΥΖΟΥΔΗΣ

Μα δίνεται ότι για $t=0$ ότι $q=Q$
(αρχικό φορτίο πυκνωτή) οπότε

$$q(0) = A\cdot\cos 0 + \cancel{B \sin 0} = Q \Rightarrow \boxed{A=Q}.$$

Μια δεύτερη αρχική συνθήκη είναι ότι αφού για $t=0$ ο διακόπτης μόλις έκλεισε $\Rightarrow$ το ρεύμα είναι μηδέν. Άρα $i(0) = -\frac{dq(0)}{dt} = 0 \Rightarrow$

$$\cancel{-A\omega \sin 0} + B\omega\cos 0 = 0 \Rightarrow \boxed{B=0}.$$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$\boxed{q(t) = Q\cos\omega t}$$

και το ρεύμα είναι

$$\boxed{i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = Q\omega \sin\omega t}$$

Δ. ΣΟΥΖΟΥΔΗΣ