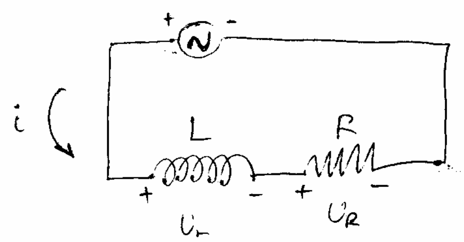
c) Στο παρακάτω κύκλωμα η πηγή παρέχει εναλλασσόμενη τάση. Βρείτε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα όπως και τις λύσεις της για μεγάλους χρόνους t (1)

$U = U_0 \sin\omega t$



Λύση: Από τον νόμο τάσεων του Kirchhoff έχουμε (κατά την φορά του ρεύματος):

$$U - U_L - U_R = 0 \Rightarrow U_0 \sin\omega t - L\frac{di}{dt} - Ri = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τους τύπους $U_L = L\frac{di}{dt}$ για την τάση του πηνίου (δεν χρειάζεται (−) με τα πρόσημα που δείχνονται στο κύκλωμα) και $U_R = iR$ (νόμος του Ohm). Επομένως

$$\boxed{L\frac{di}{dt} + Ri = U_0 \sin\omega t}$$

1 Διαφορική Εξίσωση

Η παραπάνω είναι Δ.Ε. πρώτης τάξης, γραμμική. Επομένως η λύση της θα περιέχει δύο όρους

$i(t) = i_{ομ}(t) + i_{μο}(t)$ όπου $i_{ομ}(t)$ η λύση της ομογενούς Δ.Ε.: $L\frac{di_{ομ}}{dt} + Ri_{ομ} = 0$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

επειδή $i_{\mu o}$ είναι μια μερική λύση της (2) μη ομογενούς. Η ομογενής Δ.Ε. γράφεται

$$L\frac{di}{dt} = -Ri$$

δηλαδή όταν παραγωγίζουμε το $i(t)$ παίρνουμε μείον τον εαυτό του επί κάποιες σταθερές

ως γνωστόν η συνάρτηση στα μαθηματικά που έχει τέτοιες ιδιότητες είναι η εκθετική $i = i_0 e^{-\alpha t}$

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$L\left(-\alpha i_0 e^{-\alpha t}\right) = -R i_0 \cancel{e^{-\alpha t}} \Rightarrow \alpha = \frac{R}{L}$$

Δηλαδή $\boxed{i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$. λύση της μη ομογενούς

Αυτή η λύση σβήνει εκθετικά για $t \to \infty$ οπότε δεν μας αφορά αφού μας ζητήθηκαν οι λύσεις για μεγάλο χρονικό διάστημα. Οπότε για $t \to \infty$ $\quad i_{o\mu}(t) \simeq 0$

Για μια ορισμένη λύση της μη ομογενούς

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_0 \sin\omega t$$

σκεφτόμαστε ως εξής: Όταν εφαρμόζουμε μια εναλλασσόμενη τάση σε ένα κύκλωμα, περιμένουμε και τα ρεύματα να έχουν παρόμοια μορφή. Οπότε δοκιμάζουμε

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

$$i(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 1 έχουμε:

$$L\omega\left(A\cos\omega t - B\sin\omega t\right) + R\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right) = U_0\sin\omega t$$

Ξεχωρίζοντας τους συντελεστές του $\sin\omega t$ και $\cos\omega t$ έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} AL\omega + BR &= 0 \\ AR - BL\omega &= U_0 \end{aligned}\right\}$$

Σύστημα 2×2 με αγνώστους τα A, B.

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι

$$A = \frac{RU_0}{R^2 + L^2\omega^2} \qquad B = -\frac{L\omega U_0}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Επομένως

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R^2 + (L\omega)^2}\left\{R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t\right\}}$$

Παρατηρούμε ότι σε κυκλώματα εναλλασσόμενων τάσεων και ρευμάτων, υπάρχει εξάρτηση των μεγεθών αυτών από την κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$ (όπου f η συχνότητα). Δηλαδή σε διαφορετικές συχνότητες έχουμε διαφορετικό πλάτος του ρεύματος.

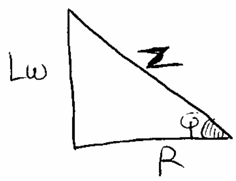
Δ. ΓΟΥΖΟΥΔΗΣ

σ) Να γραφεί η παραπάνω έκφραση $i(t)$ του προηγούμενου προβλήματος σε μορφή $i = i_0 \sin(\omega t + \phi)$ όπου i_0 το πλάτος και ϕ: φάση

Λύση: Έχουμε

$$i = \frac{V_0}{R^2 + (L\omega)^2} \left\{ R\sin\omega t - L\cos\omega t \right\}$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής $Z^2 = R^2 + (L\omega)^2$ μοιάζει με πυθαγόρειο θεώρημα οπότε σχηματίζουμε το τρίγωνο



τότε:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}, \quad \sin\varphi = \frac{L\omega}{Z}$$

Οπότε

$$i = \frac{V_0}{Z^2}\left\{R\sin\omega t - L\cos\omega t\right\} = \frac{V_0}{Z}\left(\sin\omega t \cos\varphi - \cos\omega t \sin\varphi\right)$$

ή

$$\boxed{i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi)}$$

Επομένως το ρεύμα $i(t)$ έχει πλάτος

$$i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

και διαφορά φάσης φ όπου

$$\tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Παρατήρηση: Η ποσότητα $L\omega$ όπως και η $Z=\sqrt{R^2+(L\omega)^2}$ έχουν διαστάσεις αντιστάσεως, δηλαδή Ohm. Το $Z_L= L\omega$ ονομάζεται "άεργη αντίσταση" του πηνίου και το Z "σύνθετη αντίσταση" του κυκλώματος.

δ) Να χαρακτηρισθεί η συμπεριφορά του κυκλώματος $R-L$ συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας ω.

Λύση: Όπως είδαμε παραπάνω, όταν εφαρμόζεται μια εναλλασσόμενη τάση $\upsilon = \upsilon_0\, ημ\,\omega t$ στο κύκλωμα $R-L$, το ρεύμα δίνεται από την σχέση

$$i = i_0\, ημ(\omega t-\varphi) \quad \text{όπου} \quad i_0=\frac{\upsilon_0}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$$

$$εφ\varphi=\frac{L\omega}{R}$$

Παρατηρούμε ότι για χαμηλές συχνότητες $\omega\to 0$

$i_0 \to \frac{V_0}{\sqrt{R^2}} = \frac{V_0}{R}$ δηλαδή είναι σαν να απουσιάζει τελείως το πηνίο και έχουμε τον νόμο του Ohm.

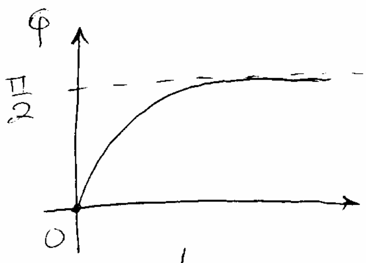
Επίσης $εφ\varphi \to 0 \Rightarrow \varphi\to 0$ δηλαδή η τάση $\upsilon=V_0\, ημ\,\omega t$ και το ρεύμα $i=I_0\, ημ\,\omega t$ είναι συμφασικά.

Στο όριο των υψηλών συχνοτήτων $\omega \to \infty$

και $i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}} \to 0$ $\tan\varphi \to \infty \Rightarrow \varphi = \pi/2$

Δηλαδή το πηνίο "πνίγει" τα ρεύματα υψηλών συχνοτήτων, ενώ το ρεύμα $i = i_0 \sin(\omega t - \pi/2) = i_0 \cos\omega t$ προηγείται έναντι της τάσης $V = V_0 \sin\omega t$ κατά 90°.

Πλάτος



Φάση

Οι τάσεις που αναπτύσσονται στο κύκλωμα είναι

οι $V_R = iR = Ri_0 \sin(\omega t - \varphi) = V_{R0} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

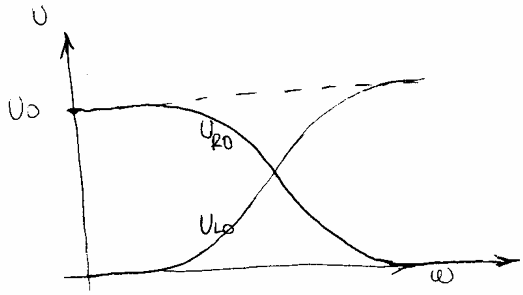
και $V_L = L\frac{di}{dt} = L\omega i_0 \cos(\omega t - \varphi) = V_{L0} \cos(\omega t - \varphi)$

όπου $V_{R0} = Ri_0 = \frac{R}{Z} V_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}} V_0$

$V_{L0} = L\omega i_0 = \frac{L\omega}{Z} V_0$

$= \frac{L\omega}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}} V_0$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ



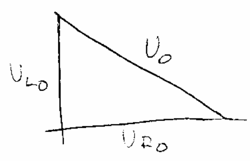
Βλέπουμε ότι για $\omega \to 0$ $U_{R0} \to U_0$ και $U_{L0} \to 0$
δηλαδή είναι σαν να είναι το πηνίο απών (όπως είδαμε και παραπάνω).

Αντιθέτως για $\omega \to \infty$ $U_{R0} \to 0$ και $U_{L0} \to \frac{L\omega}{L\omega} U_0 = U_0$
δηλαδή οι ρόλοι εναλλάσσονται.

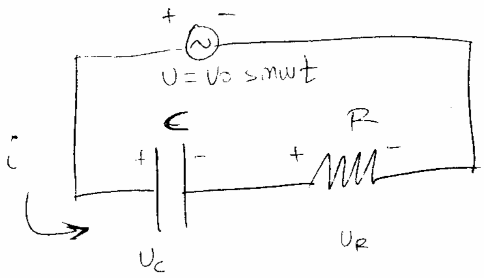
Σε ενδιάμεσες συχνότητες ισχύει $U_{R0}^2 + U_{L0}^2 =$

$$= \left\{ \frac{R^2}{R^2+(L\omega)^2} + \frac{(L\omega)^2}{R^2+(L\omega)^2} \right\} U_0^2 = U_0^2$$

Δηλαδή και τα πλάτη ικανοποιούν το Πυθαγόρειο θεώρημα οπότε μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκουν σε τρίγωνο



(Σημείωση: μην μπερδεύετε τα πλάτη U_{L0} και U_{R0} με τις στιγμιαίες τιμές $U_L = U_{L0}\cos(\omega t - \varphi)$ και $U_R = U_{R0}\sin(\omega t - \varphi)$ που ικανοποιούν $U = U_R + U_L$ όπου $U = U_0 \sin\omega t$ η τάση της πηγής) δ) Δίνεται το κύκλωμα R–C με πηγή (8) εναλλασσόμενης τάσης $u = u_0 \sin\omega t$. Να γίνει παρόμοια ανάλυση με αυτήν του κυκλώματος R–L.



<u>Λύση</u>: Διαφορική εξίσωση. Από τον νόμο του Kirchhoff έχουμε

$$u - U_C - U_R = 0 \Rightarrow u - \frac{q}{C} - iR = 0$$ όπου

q είναι το φορτίο του πυκνωτή, και i το ρεύμα που ρέει στο κύκλωμα. Έτσι έχουμε δύο μεταβλητές και πρέπει να απαλείψουμε την μία από αυτές. Το ρεύμα ισούται με $i = \frac{dq'}{dt}$ όπου dq' το φορτίο που ρέει στο κύκλωμα. Λόγω της φοράς του ρεύματος, ένα ποσό dq' φορτίου διαρρέει στο αριστερό κομμάτι του κυκλώματος, θα καταλήξει στον (+) οπλισμό του πυκνωτή, και έτσι το φορτίο του θα αυξηθεί κατά $dq = dq'$ επομένως $i = \frac{dq'}{dt} = \frac{dq}{dt}$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

(Προσέξτε ότι στην περίπτωση που το ρεύμα κατευθύνεται μακριά από τον (+) οπλισμό, όπως

τότε έχουμε $i = -\frac{dq}{dt}$, όπως έχουμε δει σε παλαιότερο παράδειγμα).

Επομένως η Δ.Ε. γίνεται

$$u - \frac{q}{C} - R\frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = U_0 \sin\omega t}.$$

Όπως και προηγουμένως, η λύση της ομογενούς φθίνει εκθετικά οπότε για μεγάλους χρόνους μπορεί να αγνοηθεί. Για την μερική λύση της μη ομογενούς δοκιμάζουμε $q = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

$$\frac{dq}{dt} = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$$

Με αντικατάσταση

$$R\omega(A\cos\omega t - B\sin\omega t) + \frac{1}{C}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = U_0\sin\omega t$$

Ξεχωρίζοντας τους συντελεστές του $\sin\omega t$ και $\cos\omega t$:

$$\left.\begin{aligned} R\omega A + \frac{1}{C}B &= 0 \\ \frac{1}{C}A - R\omega B &= U_0 \end{aligned}\right\} \text{ σύστημα } 2\times 2 \text{ ως προς } A, B$$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$q = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

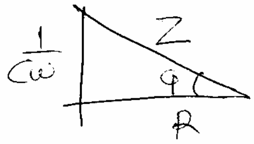
$$\boxed{q = \frac{CV_0}{1+C^2R^2\omega^2}\left\{\sin\omega t + CR\omega\cos\omega t\right\}} \quad [1]$$

Εμάς μας ενδιαφέρει το ρεύμα $i = \frac{dq}{dt}$ οπότε

$$i = \frac{V_0 C\omega}{1+C^2R^2\omega^2}\left\{\cos\omega t + CR\omega\sin\omega t\right\}$$ ή

$$i = \frac{V_0}{R^2+\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}\left\{R\sin\omega t + \frac{1}{C\omega}\cos\omega t\right\}$$

Όπως γνωρίζουμε



$$Z^2 = R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2$$

Z: σύνθετη αντίσταση κυκλώματος

$Z_C = \frac{1}{C\omega}$: άεργη αντίσταση πυκνωτή

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \qquad \sin\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega}}{Z}$$

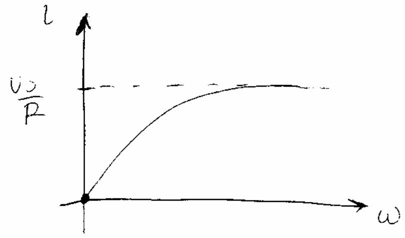
$$i = \frac{V_0}{Z^2}\left\{R\sin\omega t + \frac{1}{C\omega}\cos\omega t\right\} = \frac{V_0}{Z}\left(\sin\omega t\cdot\cos\varphi + \cos\omega t\cdot\sin\varphi\right)$$

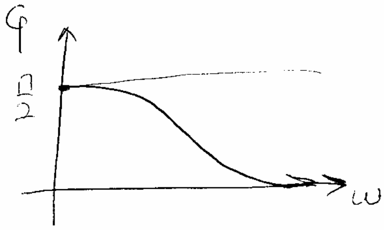
$$i = i_0\sin(\omega t + \varphi)$$

όπου $i_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ $\quad \tan\varphi = \frac{1}{RC\omega}$

Για $\omega \to 0$ $\quad i_0 \to \frac{U_0}{\infty} \to 0$ $\quad \tan\varphi \to \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

-//- $\omega \to \infty$ $\quad i_0 \to \frac{U_0}{R}$ $\quad \tan\varphi \to 0 \Rightarrow \varphi = 0$





Οι τάσεις είναι

$U_R = iR = U_{R0}\sin(\omega t + \varphi)$ $\quad U_{R0} = i_0 R = \frac{R U_0}{\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}}$

$U_C = \frac{1}{C} q =$ (από την Εξίσωση 1)

$= \frac{U_0}{1 + C^2R^2\omega^2} \left\{ \sin\omega t - CR\omega \cos\omega t \right\} =$

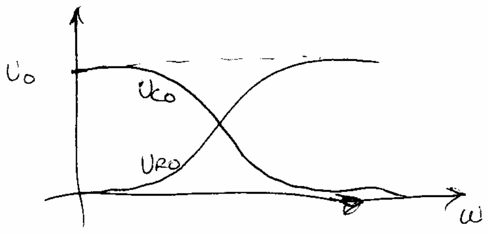
$= \frac{U_0 \frac{1}{C\omega}}{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \left\{ \frac{1}{C\omega} \sin\omega t - R\cos\omega t \right\} =$

$= \frac{U_0 \frac{1}{C\omega}}{Z^2} \left\{ \frac{1}{C\omega} \sin\omega t - R\cos\omega t \right\} = \frac{U_0 \frac{1}{C\omega}}{Z} (\sin\varphi \sin\omega t - \cos\varphi \cos\omega t)$

Δ. ΚΟΥΖΟΥΚΛΗΣ

Ἡ $U_C = \dfrac{-U_0 \frac{1}{C\omega}}{Z} \cos(\varphi + \omega t)$

$U_C = -U_{C0}\cos(\omega t + \varphi)$ $\qquad U_{C0} = \dfrac{U_0 \frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$



Για $\omega \to 0$

$U_{C0} \to U_0 \dfrac{\frac{1}{C\omega}}{\frac{1}{C\omega}} = U_0$

$U_{R0} \to 0$

Για $\omega \to \infty$

$U_{C0} \to 0$

$U_{R0} \to U_0$

Ισχύει και εδώ

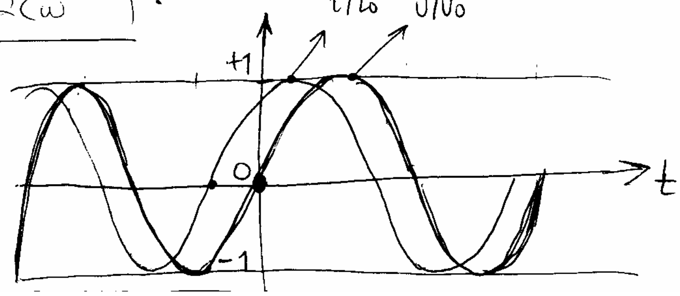
$U_{C0}^2 + U_{R0}^2 = U_0^2$

Το ρεύμα γενικώς δίνεται από την

$i = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (Σημείωση: Στο R-L ήταν $i_0 \sin(\omega t - \varphi)$)

οποίο υστερεί έναντι της τάσης $U = V_0 \sin\omega t$ κατά φ όπου

$\boxed{\tan\varphi = \dfrac{1}{RC\omega}}$.



Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ