

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής
Γενικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

Περιεχόμενα

- ▶ Γενική ιδέα
- ▶ Μετασχηματισμός Laplace
- ▶ Μετασχηματισμοί Fourier
- ▶ Μετασχηματισμός Hankel
- ▶ Μετασχηματισμός Mellin
- ▶ Μετασχηματισμός Hilbert
- ▶ Επανάθροιση Poisson

Γενική ιδέα

Στη μελέτη φυσικών προβλημάτων με ΔE είναι πολλές φορές αναγκαία η χρήση μετασχηματισμών με ολοκληρώματα.

Ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός απεικονίζει:

- ▶ Μια συνάρτηση $f(x)$, $x \in [a, b]$ στη συνάρτηση

$$g(k) = T[f(x)] = \int_a^b dx T(k, x) f(x), \quad (1)$$

όπου $T(k, x)$ ο πυρήνας του μετασχηματισμού.

- ▶ Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό σε μια ΔE βρίσκουμε:
 - ▶ Αν η αρχική ΔE είναι γραμμική και περιέχει συνήθεις παραγώγους, μια αλγεβρική εξίσωση.
 - ▶ Αν η αρχική ΔE είναι γραμμική και περιέχει μερικές παραγώγους, μια ΔE με, μερικές γενικά, παραγώγους εκτός από αυτές ως προς x .
 - ▶ Αν η αρχική ΔE είναι μη γραμμική μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση.

- ▶ Εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό στις **οριακές** και **συνοριακές** συνθήκες του αρχικού προβλήματος για την $f(x)$ ώστε να έχουμε αντίστοιχες συνθήκες για την $g(k)$.
- ▶ Προσπαθούμε να βρούμε τον **αντίστροφο μετασχηματισμό**

$$f(x) = T^{-1}[g[k]] . \quad (2)$$

Αυτό μπορεί να είναι εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα.

Μετασχηματισμός Laplace

Για μια συνάρτηση $f(x)$ με $x > 0$ η οποία δεν αποκλίνει εκθετικά για $x \rightarrow \infty$, ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται ως

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(s) = \int_0^{\infty} dx e^{-sx} f(x), \quad s > 0. \quad (3)$$

Οι παρακάτω ιδιότητες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες:

- ▶ Ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός:

$$\mathcal{L}[f(x) + g(x)] = \mathcal{L}[f(x)] + \mathcal{L}[g(x)]. \quad (4)$$

- ▶ Μετασχηματισμοί παραγώγων:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(x)] &= sF(s) - f(0), \\ \mathcal{L}[f''(x)] &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned} \quad (5)$$

Η απόδειξη γίνεται με κατάλληλες ολοκληρώσεις κατά παράγοντες [Άσκηση].

- ▶ Πιο γενικά για την n -οστή παράγωγο

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = s^n F(s) - \sum_{m=1}^n s^{n-m} f^{(m-1)}(0), \quad (6)$$

η οποία αποδεικνύεται εύκολα με τη μέθοδο της επαγωγής.

- ▶ Μετατόπιση αξόνων

$$\mathcal{L}[f(x-a)] = e^{-ax} \mathcal{L}[f(x)], \quad a > 0 \quad (7)$$

και

$$\mathcal{L}[f(x+a)] = e^{ax} \left(\mathcal{L}[f(x)] - \int_0^a dx f(x) e^{-ax} \right), \quad a > 0. \quad (8)$$

Προσέξτε τη διαφορά μεταξύ των εκφράσεων για $\mathcal{L}[f(x \pm a)]$. Οφείλεται στο γεγονός ότι $f(x) = 0$ για $x < 0$.

- ▶ Μετασχηματισμός ολοκληρώματος **[Άσκηση]**

$$\mathcal{L} \left[\int_0^x dt f(t) \right] = \frac{F(s)}{s}. \quad (9)$$

- Μετασχηματισμός περιοδικής συνάρτησης $f(x) = f(x + T)$

$$\mathcal{L}[f(x)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T dx e^{-sx} f(x) . \quad (10)$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(x)] &= \int_0^{\infty} dx e^{-sx} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} dx e^{-sx} f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T dy e^{-s(y+nT)} f(y + nT) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} \right) \int_0^T dy e^{-sy} f(y) , \end{aligned}$$

όπου έθεσα $x = y + nT$. Η άθροιση είναι αυτής γεωμετρικής προόδου και οδηγεί στο αποτέλεσμα.

Οριακή συμπεριφορά

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό βρίσκουμε ότι:

- ▶ Μικρές τιμές του x αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές του s . Πράγματι με ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$F(s) = \int_0^{\infty} dx e^{-sx} f(x) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} dx e^{-sx} f'(x) .$$

Άρα έχουμε ότι

$$F(s) = f(0)/s + \mathcal{O}(1/s^2) . \quad (11)$$

Πιο γενικά

$$F(s) = f^{(n)}(0)/s^{n+1} + \mathcal{O}(1/s^{n+2}) , \quad (12)$$

όπου $f^{(n)}(0)$ η πρώτη μη μηδενική πολλαπλή παράγωγος.

- **Μεγάλες** τιμές του x αντιστοιχούν σε **μικρές** τιμές του s αν το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ υπάρχει και είναι **μη μηδενικό**.
Απ' τον ορισμό

$$F(s) = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} dy e^{-y} f(y/s) ,$$

απ' όπου αν $f(y/s) = f(\infty) + \mathcal{O}(s)$, έχουμε

$$F(s) = f(\infty)/s + \mathcal{O}(1) . \quad (13)$$

- Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ **δεν υπάρχει** (π.χ. αν έχουμε τριγωνομετρικές συναρτήσεις) έχουμε απ' την ανάπτυξη σε σειρά

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} dx (-1)^n x^n f(x) \right) s^n \\ &= \int_0^{\infty} dx f(x) - s \int_0^{\infty} dx x f(x) + \mathcal{O}(s^2) . \quad (14) \end{aligned}$$

- ▶ Αν έχουμε τη συμπεριφορά

$$f(x) \simeq A x^a, \quad a > 0 \quad x \gg 1, \quad (15)$$

έχουμε

$$F(s) \simeq \frac{A}{s^{a+1}} \int_0^\infty dy y^a e^{-y} = \Gamma(a+1) \frac{A}{s^{a+1}}, \quad \text{όταν } s \rightarrow 0. \quad (16)$$

- ▶ Αν έχουμε τη συμπεριφορά

$$f(x) \simeq \sum_i A_i x^{a_i} e^{-b_i x}, \quad a_i, b_i > 0 \quad x \gg 1, \quad (17)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} F(s) &\simeq \sum_i \frac{A_i}{s^{a_i+1}} \int_0^\infty dy y^{a_i} e^{-(1+b_i/s)y} \\ &= \sum_i \Gamma(a_i+1) \frac{A_i}{b_i^{a_i+1}}, \quad \text{όταν } s \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (18)$$

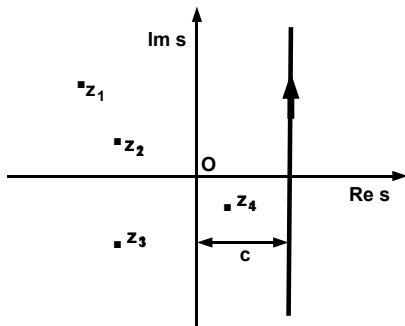
- ▶ Όλοι οι εκθετικοί όροι συνεισφέρουν.
- ▶ Το όριο $b_i \rightarrow 0$ δεν είναι αναλυτικό

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{sx} F(s), \quad (19)$$

όπου $c > 0$ εκλέγεται έτσι ώστε όλοι οι πόλοι της $F(s)$ να κείτονται στ' αριστερά της ευθείας $s = c$ όπως στο σχήμα.



Σχήμα: Δρόμος για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Εκτός από τους πόλους μπορεί αν υπάρχουν και σημεία διακλάδωσης.

- ▶ Κλείνουμε την ευθεία με ένα ημικύκλιο προς τ' αριστερά της σχηματίζοντας κλειστή καμπύλη C .
- ▶ Επειδή $x > 0$, η συνεισφορά του ημικυκλίου είναι μηδενική και τελικά

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{sx} F(s) = \sum_{k=1}^n R_k . \quad (20)$$

- ▶ Το τελικό αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της εκλογής της σταθεράς c .

Θεώρημα Συνέλιξης: Έστω ότι

$$\mathcal{L}[g(x)] = \mathcal{L}[f_1(x)]\mathcal{L}[f_2(x)] . \quad (21)$$

Τότε η συνάρτηση $g(x)$ βρίσκεται απ' το ολοκλήρωμα

$$g(x) = \int_0^x dt f_1(t)f_2(x-t) . \quad (22)$$

Το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται συχνότατα στην εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

Παραδείγματα 1ο: Υπολογισμός αντιστρόφου μετασχηματισμού
Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(s) , \quad F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} , \quad a, b \in \mathbb{R} . \quad (23)$$

Λύση:

1ος τρόπος: Με χρήση του θεωρήματος συνέλιξης έχουμε

$$f(t) = \int_0^t dz F_1(t-z)F_2(z) ,$$

όπου

$$F_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + a^2} \right) = \cos at ,$$

$$F_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + b^2} \right) = \frac{1}{b} \sin bt .$$

Άρα έχουμε ότι

$$f(t) = \frac{1}{b} \int_0^t dz \cos a(t-z) \sin bz = \frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}, \quad \text{αν } a^2 \neq b^2, \quad (24)$$

και

$$f(t) = \frac{1}{b} \int_0^t dz \cos b(t-z) \sin bz = \frac{t \sin bt}{2b}, \quad \text{αν } a^2 = b^2. \quad (25)$$

Το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε στο όριο $b \rightarrow a$ της (24).

Παρατηρείστε ότι:

- ▶ Για $s \gg 1$, $F(s) \simeq 1/s^3$ το οποίο είναι συμβατό με το γεγονός ότι $f''(0) = 1$.
- ▶ Για $s \ll 1$, $F(s) = \mathcal{O}(s)$.

2ος τρόπος: Με απευθείας υπολογισμό του ολοκληρώματος (19) που ορίζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

- ▶ Έχουμε απλούς πόλους στα σημεία $s = \pm ia$ και $s = \pm ib$, εκτός αν $a = b$, οπότε έχουμε δύο διπλούς πόλους στα σημεία $s = \pm ib$.
- ▶ Επιλέγουμε τη σταθερά $c > 0$. Για $t > 0$ μπορούμε να κλείσουμε το περίγραμμα προς τ' αριστερά της ευθείας $s = c$. Τότε τα αποτελέσματα (24) και (25) έπονται.
- ▶ Ως [Άσκηση] συμπληρώστε όλα τα βήματα της λύσης.

Παραδείγματα 2ο: Επίλυση συστήματος ΔΕ

Επιλύστε το σύστημα ΔΕ

$$\dot{x} + x + y = f(t) ,$$

$$\dot{y} - 3x + 5y = 0 ,$$

με αρχικές συνθήκες $x = y = 0$ στο $t = 0$, όπου

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 , \\ e^{-t} & t \geq 0 . \end{cases}$$

Λύση: Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας ότι

$$\int_0^{\infty} dt e^{-st} f(t) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

καθώς και το μετασχηματισμό Laplace παραγώγου έχουμε

$$s\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y) = \frac{e^{-s}}{s+1} ,$$

$$s\mathcal{L}(y) - 3\mathcal{L}(x) + 5\mathcal{L}(y) = 0$$

Βρίσκουμε έτσι ότι

$$\mathcal{L}(x) = \frac{e^{-s}(s+5)}{8+14s+7s^2+s^3} = \frac{e^{-s}}{6} \left(\frac{1}{s+4} - \frac{9}{s+2} + \frac{8}{s+1} \right),$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{3e^{-s}}{8+14s+7s^2+s^3} = \frac{e^{-s}}{2} \left(\frac{1}{s+4} - \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s+1} \right).$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$x(t) = \frac{e^{-4t}}{6} \left(1 - 9e^{2t} + 8e^{3t} \right) \Theta(t),$$

$$y(t) = \frac{e^{-4t}}{2} \left(1 - 3e^{2t} + 2e^{3t} \right) \Theta(t).$$

- ▶ Οι παραπάνω εκφράσεις είναι συνεχείς στο $t = 0$. Δεν συμβαίνει το ίδιο για τις παράγωγους τους, διότι η $f(t)$ είναι ασυνεχής στο $t = 0$.
- ▶ Μπορούμε να ελένξουμε ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά συμπίπτει με τα γενικά αποτελέσματα της θεωρίας.

Παραδείγματα 3ο: Εξίσωση διάχυσης

Επιλύστε τη μονοδιάστατη εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (26)$$

με αρχική συνθήκη

$$T(x, 0) = \delta(x) \quad (27)$$

και δείξτε ότι η λύσης της δίνεται από

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}. \quad (28)$$

Λύση: θεωρούμε τον μετασχηματισμό Laplace ως προς t της $T(x, t)$

$$F(x, s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} T(x, t). \quad (29)$$

Τότε η ΔΕ (26) και η αρχική συνθήκη (28) δίνουν

$$\frac{\partial^2 F(x, s)}{\partial x^2} = sF(x, s) - \delta(x) ,$$

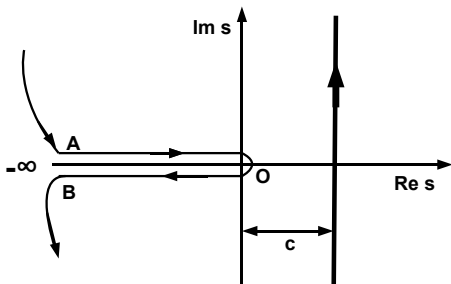
της οποίας η λύση είναι

$$F(x, s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} e^{-\sqrt{s} |x|} .$$

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} F(x, s) , \quad (30)$$

όπου $c > 0$ και ο δρόμος είναι όπως στο παρακάτω σχήμα.



Τημείο $s = 0$ είναι σημείο διακλάδωσης. Έχουμε

$$I_{AO} + I_{OB} + T(x, t) = 0 ,$$

όπου

$$AO : \quad s = ye^{i\pi}, \quad I_{AO} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^0 \frac{-dy}{2\sqrt{y}i} e^{-yt-i\sqrt{y}|x|} ,$$

$$OB : \quad s = ye^{-i\pi}, \quad I_{OB} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{-dy}{-2\sqrt{y}i} e^{-yt+i\sqrt{y}|x|} .$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-yt}}{\sqrt{y}} \cos \sqrt{y}|x| , \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk e^{-k^2 t} \cos kx , \end{aligned}$$

όπου θέσαμε $y = k^2$. Υπολογίζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα [Άσκηση] βρίσκουμε την (28).

Παράδειγμα 4ο: Μετασχηματισμός *Laplace* ειδικών συναρτήσεων

Θα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων Bessel και θα δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \int_0^{\infty} dx J_n(x) e^{-sx} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ &= \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1} (\sqrt{s^2 + 1} + s)^n} = \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^n}{\sqrt{s^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση των συναρτήσεων Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi + ix \sin \phi}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_{-n}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{in\phi} \int_0^{\infty} dx e^{-(s - i \sin \phi)x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{in\phi}}{s - i \sin \phi}. \end{aligned}$$

Αλλάζοντας μεταβλητή σε $z = e^{i\phi}$ έχουμε

$$F_{-n}(s) = \frac{i}{\pi} \oint_C dz \frac{z^n}{z^2 - 2sz - 1},$$

όπου C ο μοναδιαίος κύκλος. Υπάρχουν δύο απλοί πόλοι $z_{\pm} = s \pm \sqrt{s^2 + 1}$, με $z_+ z_- = -1$. Μόνο ο z_- είναι εντός του C . Εκτελώντας το ολοκλήρωμα

$$F_{-n}(s) = \frac{z_-^n}{\sqrt{s^2 + 1}}.$$

Με χρήση της $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ και της $z_+ z_- = -1$ βρίσκουμε την (31).

- Σημειώνω ότι

$$F_n(s) \simeq \frac{1}{2^n s^{n+1}}, \quad s \gg 1.$$

Αυτό είναι συμβατό με τη γενική θεωρία λόγω της σχέσης $J_n^{(n)}(0) = 2^{-n}$.

- Ο υπολογισμός έγινε για $F_{-n}(s)$ για να αποφύγουμε τον πλοκαγιά πόλο στο $z = 0$.

Μετασχηματισμός με σειρά *Fourier*

Έστω μια, εν γένει μιγαδική, συνάρτηση $f(x)$ με περίοδο L . Η ανάπτυξή της σε σειρά *Fourier* είναι

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x / L} . \quad (32)$$

Προφανώς ισχύει ότι $f(x + L) = f(x)$. Οι συντελεστές είναι

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) e^{-2\pi i n x / L} , \quad (33)$$

όπου χρησιμοποίησα ότι: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi} = \delta_{n,m}$, για $n, m \in \mathbb{Z}$.

Θεώρημα του Parseval: Το ακόλουθο θεώρημα ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx |f(x)|^2 &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} dx a_n a_m^* e^{2\pi i(n-m)x/L} \\ &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} a_n a_m^* \delta_{n,m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 . \quad (34) \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός με ολοκλήρωμα *Fourier*

Η ανάπτυξη μιας μιγαδικής συνάρτησης $f(x)$ σε ολοκλήρωμα Fourier δίνεται απ' τις προηγούμενες σχέσεις στο όριο $L \rightarrow \infty$. Η μετατροπή απ' το **διακριτό** στο **συνεχές** γίνεται ως εξής:

$$2\pi \frac{n}{L} = k, \quad La_n = a(k), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dn = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk.$$

Η ανάπτυξη της σε **ολοκλήρωμα Fourier** είναι

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) e^{ikx}.$$

Οι συντελεστές της ανάπτυξης δίνονται από

$$a(k) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}.$$

Παρατήρηση: Οι συντελεστές 1 και $1/(2\pi)$ στις παραπάνω σχέσεις είναι ως ένα βαθμό αυθαίρετοι. Μπορούν να αντικατασταθούν με οποιοδήποτε σταθερές με γινόμενο $1/(2\pi)$.

Θεώρημα του Parseval: Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' a(k) a^*(k') e^{i(k-k')x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' a(k) a^*(k') \delta(k - k') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk |a(k)|^2 . \end{aligned}$$

Σχόλια:

- ▶ Στην ταυτότητα Parseval οι διαφορετικές συχνότητες δεν αναμιγνύονται μεταξύ τους, τόσο στην διακριτή όσο και στη συνεχή περίπτωση.
- ▶ Αν το x παριστάνει μήκος τότε k είναι το κυματόνισμα.
- ▶ Αν το x παριστάνει χρόνο τότε k είναι η συχνότητα και τα σύμβολα x, k αντικαθίστανται με τα t και ω , αντιστοίχως.
- ▶ Η ταυτότητα Parseval φανερώνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια μοναδιαία απεικόνιση μεταξύ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$.

Προβλήματα ακτινοβολίας:

- ▶ Η συνάρτηση $f(t)$ σχετίζεται με το διάνυσμα **Poynting** και την ακτινοβολούμενη **Ηλεκτρομαγνητική ενέργεια**.
- ▶ Τότε, $|f(t)|^2 dt$ είναι η ακτινοβολούμενη ενέργεια στο χρονικό διάστημα από t έως $t + dt$, ενώ $|a(\omega)|^2 d\omega$ είναι ακτινοβολούμενη ενέργεια στο διάστημα συχνοτήτων από ω έως $\omega + d\omega$.
- ▶ Η ταυτότητα του Parseval εκφράζει τη φυσική απαίτηση ότι η συνολική ακτινοβολούμενη ενέργεια είναι η ίδια με όποιο τρόπο και αν υπολογισθεί.

Οι παρακάτω **ιδιότητες** είναι ιδιαίτερα χρήσιμες:

- ▶ Ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός:

$$\mathcal{F}[f(x) + g(x)] = \mathcal{F}[f(x)] + \mathcal{F}[g(x)] . \quad (35)$$

- ▶ Για μετασχηματισμούς παραγώγων, υποθέτοντας ότι η $f(x)$ και οι παράγωγοί της μηδενίζονται για $x \rightarrow \pm\infty$, έχουμε

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (ik)^n \mathcal{F}[f(x)] = (ik)^n a(k) , \quad (36)$$

με αλληπάλληλες ολοκληρώσεις κατά παράγοντες.

- ▶ Για μετασχηματισμούς ολοκληρωμάτων έχουμε

$$\mathcal{F} \left[\int dx f(x) \right] = \frac{\mathcal{F}[f(x)]}{ik} + C\delta(k) , \quad (37)$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά. Αυτή συνδέεται με την αυθαιρεσία ως προς μια προσθετική σταθερά του ολοκληρώματος $\int dx f(x)$.

- ▶ Μετατόπιση αξόνων

$$\mathcal{L}[f(x+a)] = e^{iak} \mathcal{L}[f(x)] . \quad (38)$$

- ▶ Γενίκευση σε πολλές διαστάσεις

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{k} a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} . \quad (39)$$

Οι συντελεστές της ανάπτυξης δίνονται από

$$a(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} . \quad (40)$$

Η **συνέλιξη** δύο συναρτήσεων $f_{1,2}(x)$ ορίζεται ως

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f_1(t) f_2(x-t) . \quad (41)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της είναι

$$\mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}[f_1(x)] \mathcal{F}[f_2(x)] . \quad (42)$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt f_1(t) f_2(x-t) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dt e^{-ikx} f_1(t) f_2(x-t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dt e^{-ik(x-t)} e^{-ikt} f_1(t) f_2(x-t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dt e^{-ikx'} e^{-ikt} f_1(t) f_2(x') \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f_2(x') \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ikt} f_1(t) \right] \\ &= \mathcal{F}[f_1(x)] \mathcal{F}[f_2(x)] \end{aligned}$$

Φυσική σημασία των πόλων

Έστω ότι η $a(\omega)$ έχει πόλο πρώτης τάξης και συμπεριφέρεται ως

$$a(\omega) \simeq \frac{b}{\omega - \omega_0 - i/\tau}, \quad \omega_0, (\tau > 0), \quad \text{καθώς } \omega \rightarrow \omega_0 + i/\tau.$$

Επίσης υποθέτουμε ότι ο συντελεστής $|b|$ είναι τόσο μεγάλος ώστε πρακτικά η $a(\omega)$ δίνεται απ' την παραπάνω έκφραση παντού. Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$f(t) \simeq \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_0 - i/\tau} = ibe^{-t/\tau + i\omega_0 t} \Theta(t),$$

όπου $\Theta(t) = 1(-1)$ για $t > 0$ ($t < 0$) η συνάρτηση βήματος.

Απόδειξη: θεωρούμε το ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο:

- ▶ Για $t > 0$ θεωρούμε ημικύκλιο με $\text{Im}(\omega) > 0$, που περιέχει τον πόλο στο $\omega = \omega_0 + i/\tau$, άρα το ολοκλήρωμα είναι $\neq 0$.
- ▶ Για $t < 0$ θεωρούμε ημικύκλιο με $\text{Im}(\omega) < 0$ όπου η συνάρτηση είναι αναλυτική, άρα το ολοκλήρωμα είναι $= 0$.

Συμπεραίνουμε τα εξής γενικά:

- ▶ Το **πραγματικό** μέρος ενός πόλου ω_0 , αντιστοιχεί στη **συχνότητα** ταλάντωσης.
- ▶ Το **φανταστικό** μέρος ενός πόλου $1/\tau$, αντιστοιχεί στη σταθερά χρόνου με την οποία **μειώνεται** το πλάτος της.
- ▶ Για το πλάτος ισχύει η σχέση

$$|a(\omega_0 \pm 1/\tau)|^2 = \frac{|a(\omega_0)|^2}{2}, \quad (43)$$

άρα το εύρος του πλάτους είναι $\Delta\omega \sim 1/\tau$. Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το πλάτος ταλάντωσης είναι κοντά στο μέγιστό του είναι $\Delta t \sim \tau$. Βλέπουμε λοιπόν ότι

$$\Delta\omega\Delta t \sim 1. \quad (44)$$

Σχέση με **αρχή απροσδιοριστίας** του **Heisenberg** στην **Κβαντική Μηχανική**.

Το θεώρημα των *Riemann–Lebesgue* και η φυσική του σημασία
Υπάρχει μια σχέση αντιστροφής μεταξύ των ρυθμών με τις
οποίες μια συνάρτηση και ο μετασχηματισμός Fourier αυτής
σβήνουν στο άπειρο.

Φυσική διαίσθηση/επιχειρήματα

- ▶ Όσο πιο γρήγορα μια συνάρτηση μηδενίζεται στο άπειρο:
 - ▶ τόσο πιο πολλούς τρόπους ταλάντωσης υψηλών συχνοτήτων περιέχει,
 - ▶ τόσο πιο αργά μηδενίζεται ο μετασχηματισμός Fourier αυτής στο άπειρο.
- ▶ Αντίστροφα όσο πιο ομαλή είναι μια συνάρτηση:
 - ▶ τόσο πιο λίγους τρόπους ταλάντωσης υψηλών συχνοτήτων περιέχει,
 - ▶ ο μετασχηματισμός Fourier αυτής σβήνει γρήγορα στο άπειρο.

Θεώρημα των Riemann–Lebesgue: Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ και πάει στο άπειρο αρκετά γρήγορα ώστε

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty \quad (45)$$

τότε ο μετασχηματισμός Fourier

$$a(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} . \quad (46)$$

υπάρχει, είναι συνεχής συνάρτηση του k και $|a(k)| \leq \|f\|_1$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a(k) = 0 . \quad (47)$$

- ▶ Το θεώρημα αποτελεί την μαθηματική έκφραση των προηγούμενων φυσικών επιχειρημάτων.

Η σημασία των προϋποθέσεων για να ισχύει το θεώρημα εκτιμάτε με τα ακόλουθα αντιπαραδείγματα:

► Αν

$$f(x) = \delta(x) \implies a(k) = 1,$$

που δεν πάει στο μηδέν για $k \rightarrow \infty$. Ο λόγος είναι ότι η δ -συνάρτηση δεν είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\delta(x) \notin L^2(\mathbb{R})$.

► Αν

$$f(x) = \sin(x^2) \implies a(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\cos\left(\frac{k^2}{4}\right) + \sin\left(\frac{k^2}{4}\right) \right].$$

Άρα $\lim_{k \rightarrow \infty} a(k) \neq 0$. Ο λόγος είναι ότι το ολοκλήρωμα

$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin(x^2)|$ δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα 1ο

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier της

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \left| \frac{x}{2} \right|, & |x| < 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{array} \right\} .$$

Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin^4 y}{y^4} .$$

Λύση:

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier

$$\begin{aligned} a(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = \int_{-2}^2 \left(1 - \left| \frac{x}{2} \right| \right) e^{ikx} dx \\ &= 2 \frac{\sin^2 k}{k^2} . \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval θα ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk |a(k)|^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin^4 k}{k^4} = \frac{2}{\pi} J .$$

Το αριστερό μέλος είναι

$$\int_{-2}^2 dx \left(1 - \left|\frac{x}{2}\right|\right)^2 dx = \frac{4}{3} .$$

Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin^4 y}{y^4} = \frac{2\pi}{3} .$$

Παράδειγμα 2ο: Εξίσωση διάχυσης

Επιλύστε τη μονοδιάστατη εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (48)$$

με αρχική συνθήκη

$$T(x, 0) = \delta(x) \quad (49)$$

και δείξτε ότι η λύσης της δίνεται από

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}. \quad (50)$$

Λύση: θεωρούμε τον μετασχηματισμό Fourier ως προς x της $T(x, t)$

$$F_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} T(x, t).$$

Απ' την αρχική συνθήκη (49) έχουμε ότι $F_k(0) = 1$.

Αντικαθιστώντας στην ΔΕ (48) έχουμε

$$-k^2 F_k(t) = \frac{dF_k(t)}{dt} \implies F_k(t) = e^{-k^2 t} .$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-k^2 t - ikx} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk e^{-k^2 t} \cos kx .$$

Υπολογίζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα αποδεικνύεται η (50).

Σύγκριση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών: Η επίλυση του προβλήματος με μετασχηματισμό Fourier είναι ευκολότερη απ' ό,τι με μετασχηματισμό Laplace.

Παράδειγμα 3ο: μετασχηματισμό *Fourier* ειδικών συναρτήσεων

Θα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό *Fourier* συναρτήσεων Bessel και θα δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} J_n(x) &= \frac{2e^{in\pi/2}}{\sqrt{1-k^2}} \cos n\theta_0 = \frac{2e^{in\pi/2}}{\sqrt{1-k^2}} T_n(k), \quad |k| < 1 \\ &= 0, \quad |k| > 1, \end{aligned} \quad (51)$$

όπου $T_n(k)$ είναι τα πολυώνυμα Chebyshev 1ου είδους και

$$\theta_0 = \cos^{-1} k, \quad \theta_0 \in [0, \pi].$$

Παίρνοντας το πραγματικό και φανταστικό μέρος και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \cos kx J_{2n}(x) &= (-1)^n \frac{\cos 2n\theta_0}{\sqrt{1-k^2}} = (-1)^n \frac{T_{2n}(k)}{\sqrt{1-k^2}}, \\ \int_0^{\infty} dx \sin kx J_{2n+1}(x) &= (-1)^n \frac{\cos(2n+1)\theta_0}{\sqrt{1-k^2}} = (-1)^n \frac{T_{2n+1}(k)}{\sqrt{1-k^2}}, \end{aligned}$$

για $|k| < 1$ και μηδέν για $|k| > 1$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση των συναρτήσεων Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi + ix \sin \phi}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix(k + \sin \phi)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} \delta(k + \sin \phi). \end{aligned} \quad (52)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μη μηδενικό μόνο εαν $|k| < 1$ και το όρισμα της δ -συνάρτησης μπορεί να μηδενισθεί. Έχουμε ότι

$$k + \sin \phi = 0 \implies \phi = \theta_0 - \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \phi = -\theta_0 - \frac{\pi}{2}.$$

Απ' τις ιδιότητες της δ -συνάρτησης

$$\delta(k + \sin \phi) = \frac{1}{\sin \theta_0} [\delta(\phi + \pi/2 - \theta_0) + \delta(\phi + \pi/2 + \theta_0)].$$

Αντικαθιστώντας και χρησιμοποιώντας ότι $\sin \theta_0 = \sqrt{1 - k^2}$,

Μετασχηματισμός *Hankel*

Ο μετασχηματισμός αυτός συνδέεται με τον δι-διάστατο μετασχηματισμό Fourier και ορίζεται ως εξής:

$$g_n(k) = \int_0^{\infty} d\rho \rho J_n(k\rho) f(\rho) , \quad (53)$$

όπου $J_n(x)$ η συνάρτηση Bessel τάξης n .

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός έχει παρόμοια μορφή

$$f(\rho) = \int_0^{\infty} dk k J_n(k\rho) g_n(k) . \quad (54)$$

Παραδείγματα μετασχηματισμών *Hankel*

$f(\rho)$	$g_0(k)$
$\frac{1}{\rho}$	$\frac{1}{k}$
$e^{-a\rho^2}$	$\frac{1}{2a} e^{-\frac{k^2}{4a}}$
$e^{-a\rho}$	$\frac{a}{(k^2+a^2)^{3/2}}$
$(\rho^2 + a^2)^{-1/2}$	$\frac{1}{k} e^{-ak}$
$(\rho^2 + a^2)^{-1}$	$K_0(ak)$
$\cos(a\rho^2)$	$\frac{1}{2a} \sin\left(\frac{k^2}{4a}\right)$
$\sin(a\rho^2)$	$\frac{1}{2a} \cos\left(\frac{k^2}{4a}\right)$

Τέλος σημειώνω ότι

$$f(\rho) = J_n(k'\rho) \implies g_n(k) = \frac{\delta(k - k')}{k}, \quad (55)$$

απ' την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων Bessel.

Μετασχηματισμός *Melin*

Ο μετασχηματισμός αυτός ορίζεται ως εξής:

$$\phi(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} f(t), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (56)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz t^{-z} \phi(z). \quad (57)$$

- ▶ Είναι **απολύτως αναγκαίο** να καθορίζεται η περιοχή στο μιγαδικό z -επίπεδο όπου έχει έννοια ο μετασχηματισμός και ο αντίστροφός του.
- ▶ Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα στις περιοχές $t \in (0, 1)$ και $t \in (1, \infty)$ και αλλάζουμε μεταβλητή ως $t = e^{\mp s}$ για τις δύο περιπτώσεις αντίστοιχα. Τότε

$$\phi(z) = \int_0^{\infty} ds e^{-zs} f(e^{-s}) + \int_0^{\infty} ds e^{zs} f(e^s). \quad (58)$$

Είναι προφανές ότι:

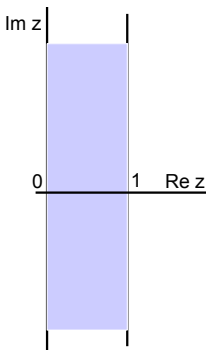
- ▶ Για να συγκλίνουν τα δύο ολοκληρώματα πρέπει το z να ανήκει σε κάποια πεπερασμένη περιοχή στο \mathbb{C} που ονομάζεται **θεμελιώδης**.
- ▶ Συνήθως η περιοχή αυτή είναι μια ζώνη που μπορεί να εκτείνεται στο άπειρο στη μια διεύθυνση. Εντός της ζώνης πρέπει να επιλέγεται και η **σταθερά c** στην (57), το δε αποτέλεσμα είναι **ανεξάρτητο** αυτής.
- ▶ Ο μετασχηματισμός Melin είναι η **σύνθεση** δύο μετασχηματισμών Laplace από δύο διαφορετικές πλευρές. Αυτό επιβάλλει και την ύπαρξη της θεμελιώδους περιοχής.

Παράδειγμα

Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{1+t}$. Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\phi(z) = \int_0^{\infty} dt \frac{t^{z-1}}{1+t}, \quad (59)$$

το οποίο είναι προφανές ότι συγκλίνει στην άπειρη ζώνη στο z -επίπεδο με $0 < \operatorname{Re} z < 1$ όπως αυτή παριστάνεται παρακάτω



Σχήμα: Θεμελιώδης ζώνη του μετασχηματισμού Mellin

Λύση: Θεωρούμε το αντίστοιχο μιγαδικό ολοκλήρωμα με καμπύλη ολοκλήρωσης
Καθώς η ακτίνα $R \rightarrow \infty$ και ο κύκλος επεκτείνεται, η μόνη μη μηδενική συνεισφορά είναι από

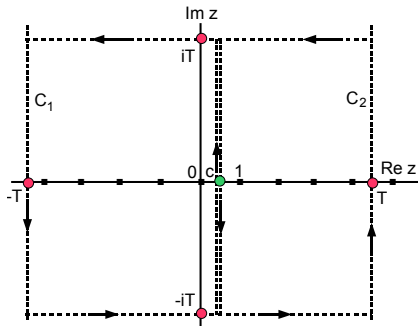
$$\int_{CD} + \int_{AB} = \phi(z)(1 - e^{2\pi iz}) .$$

Ο μόνος πόλος εντός της καμπύλης είναι στο $z = e^{i\pi}$. Οπότε

$$\phi(z)(1 - e^{2\pi iz}) = 2\pi i e^{i\pi(z-1)} \implies \phi(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} .$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός: Θα επαληθεύσουμε χρησιμοποιώντας την (57) και το αποτέλεσμα για την $\phi(z)$ ότι όντως καταλήγουμε στην αρχική συνάρτηση $f(t)$. Έχουμε το ολοκλήρωμα

$$f(t) = \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz \frac{1}{t^z \sin \pi z} .$$



Σχήμα: Δρόμοι ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του (57). Για $t < 1$ επιλέγεται ο C_1 , ενώ για $t > 1$ ο C_2 . Η σταθερά $c \in (0, 1)$.

Οι πόλοι (απλοί) είναι στα σημεία $z = n$, όπου $n \in \mathbb{Z}$ με ολοκληρωτικά υπόλοιπα

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{z - n}{2i} \frac{1}{t^z \sin \pi z} = \frac{(-1)^n}{2\pi i} t^{-n}.$$

- **Περίπτωση με $t < 1$:** Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη (σχεδόν τετράγωνο) C_1 στο όριο $T \rightarrow \infty$, η οποία περικλείει όλους τους πόλους με $n \leq 0$. Στην πάνω και κάτω οριζόντια γραμμή έχουμε $z = x \pm iT$, αντίστοιχα, με $x \in (-\infty, c)$. Άρα στο όριο $T \rightarrow \infty$ η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ανάλογη στο $t^{-x} e^{-\pi T} \rightarrow 0$, επειδή $t < 1$. Στην παράλληλη κάθετη γραμμή $z = -T + iy$ και η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ανάλογη του $t^T e^{-\pi|y|} \rightarrow 0$, επειδή $t < 1$. Άρα, για $t < 1$, έχουμε

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^0 (-1)^n t^{-n} = \frac{1}{1+t}.$$

- **Περίπτωση με $t > 1$:** Σε αυτή την περίπτωση επιλέγουμε την καμπύλη C_2 και παρόμοια αποδεικνύεται ότι οι δύο οριζόντιοι (με $x \in (c, \infty)$) και ο ένας παράλληλος δρόμος (με $x = T$) δεν συνεισφέρουν στο όριο $T \rightarrow \infty$. Άρα, για $t > 1$, έχουμε

$$f(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{-n} = - \frac{1}{1 + 1/t} + 1 = \frac{1}{1 + t},$$

όπου το μείον πρόσημο είναι λόγω του ότι στον δρόμο C_2 η φορά είναι αντίθετη.

Η συναρτησιακή σχέση για την $f(t)$ είναι η ίδια για $0 \leq t < \infty$.

Μετασχηματισμός Hilbert

Έστω $f(z)$ μια αναλυτική συνάρτηση στο πάνω μιγαδικό επίπεδο (όπου επίσης $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$) και στον πραγματικό άξονα. Τότε αν $x_0 \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0}, \quad (60)$$

όπου P είναι η κατά Cauchy κύρια τιμή του ολοκληρώματος.

Ορισμός: Έστω το ολοκλήρωμα $\int_a^b dx F(x)$ και έστω ότι αποκλίνει λόγω της συμπεριφοράς της $F(x)$ στο $x = x_0 \in (a, b)$.

Αν

$$P \int_a^b dx F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0 - \epsilon} dx F(x) + \int_{x_0 + \epsilon}^b dx F(x) \right), \quad (61)$$

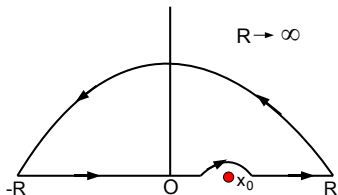
συγκλίνει, θα ονομάζεται Cauchy κύρια τιμή του ολοκληρώματος.

Απόδειξη της (60): θεωρούμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$J[f] = \oint_C dz \frac{f(z)}{z - x_0},$$

και τον δρόμο ολοκλήρωσης όπως στο σχήμα.

- ▶ Εντός της C η $f(z)$ είναι αναλυτική, άρα $J[f] = 0$.
- ▶ Επειδή $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$, η συνεισφορά του ημικυκλίου είναι μηδέν.
- ▶ Κατά μήκος του μικρού ημικυκλίου γύρω απ' το $z = x_0$, έχουμε $z = x_0 + \epsilon e^{i\phi}$, με $\phi \in [\pi, 0]$. Η συνεισφορά του στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$ είναι $-i\pi f(x_0)$.



Σχέσεις και ιδιότητες

Αν $f(x) = u(x) + iv(x)$ τότε

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{v(x)}{x - x_0}, \quad (62)$$

και

$$v(x_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{u(x)}{x - x_0}. \quad (63)$$

- ▶ Αυτού του είδους οι σχέσεις ονομάζονται **σχέσεις διασποράς**.
- ▶ Είναι μετασχηματισμοί που συνδέουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας μιγαδικής συνάρτησης και έχουν την ονομασία **μετασχηματισμοί Hilbert**.

- Αν $u(x)$ και $v(x)$ σχετίζονται με μετασχηματισμό Hilbert έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx u^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx v^2(x) . \quad (64)$$

που είναι η ταυτότητα **Parseval**.

- Αν $u(-x) = u(x)$ και $v(-x) = -v(x)$ οι (62) και (63) γράφονται

$$u(x_0) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} dx \frac{xv(x)}{x^2 - x_0^2} \quad (65)$$

και

$$v(x_0) = -\frac{2x_0}{\pi} P \int_0^{\infty} dx \frac{u(x)}{x^2 - x_0^2} . \quad (66)$$

Αυτές είναι σχέσεις **Kronig-Kramers**.

- Απ' αυτές εύκολα δείχνουμε τις **ασυμπτωτικές σχέσεις**

$$u(x_0) \simeq -\frac{2}{\pi x_0^2} \int_0^{\infty} dx xv(x) , \quad \text{για } x_0 \rightarrow \infty \quad (67)$$

και

$$v(x_0) \simeq \frac{2}{\pi x_0} \int_0^{\infty} dx u(x) , \quad \text{για } x_0 \rightarrow \infty . \quad (68)$$

Εφαρμογή στην διάδοση ΗΜ κυμάτων

Με απλή εφαρμογή των εξισώσεων Maxwell και του νόμου του Ohm μπορεί ναδειχθεί ότι σε απορροφητικά μέσα ο δείκτης διάθλασης δίνεται απ' τη σχέση

$$\eta^2(\omega) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \epsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}, \quad (69)$$

όπου ϵ και σ ο δείκτης διηλεκτρικής σταθεράς και η ειδική αγωγιμότητα, αντίστοιχα. Επειδή γενικά $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon(\omega) = 1$ εφαρμόζουμε τις σχέσεις Kronig-Kramers για τη συνάρτηση

$$f(\omega) = \eta^2(\omega) - 1, \quad (70)$$

για την οποία όντως $\lim_{\omega \rightarrow \infty} f(\omega) = 0$. Παίρνουμε

$$\operatorname{Re}(\eta^2(\omega_0) - 1) = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty d\omega \frac{\omega \operatorname{Im}(\eta^2(\omega) - 1)}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (71)$$

και

$$\operatorname{Im}(\eta^2(\omega_0) - 1) = -\frac{2\omega_0}{\pi} P \int_0^\infty d\omega \frac{\operatorname{Re}(\eta^2(\omega) - 1)}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (72)$$

Ένα φυσικό επακόλουθο αυτών είναι ότι:

- ▶ Αν δεν έχουμε οπτική διασπορά, δηλαδή αν $\text{Re}(\eta^2)$ είναι ανεξάρτητο της συχνότητας, τότε δεν έχουμε απορρόφηση. Πράγματι απ' την (72)

$$\begin{aligned} \text{Im}(\eta^2(\omega_0) - 1) &= -\frac{1}{2\pi} \text{Re}(\eta^2(\omega) - 1) \\ &\times P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \right) = 0. \quad (73) \end{aligned}$$

- ▶ Αντιστρόφως αν έχουμε απορρόφηση τότε θα έχουμε και οπτική διασπορά. Σε αυτήν τη περίπτωση παίρνουμε την παράγωγο ως προς το ω_0 της (71) και εύκολα βλέπουμε ότι δεν είναι μηδέν.

Παράδειγμα

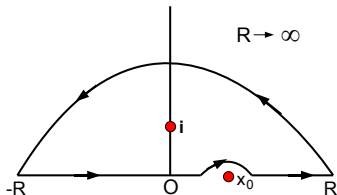
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Υποθέτοντας ότι αποτελεί το πραγματικό μέρος της $f(x) = u(x) + iv(x)$ έχουμε απ' την (63)

$$v(x_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x-x_0)(1+x^2)}.$$

Με χρήση της θεωρίας των ολοκληρωτικών υπολοίπων και του δρόμου ολοκλήρωσης στο παρακάτω σχήμα



έχουμε

$$v(x_0) + \frac{i}{1+x_0^2} = \frac{1}{x_0-i} \quad \implies \quad v(x) = \frac{x}{1+x^2},$$

όπου ο 2ος όρος στο αριστερό μέλος οφείλεται στη συνεισφορά του μικρού ημικυκλίου.

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση

$$f(z) = u(z) + iv(z) = \frac{1+iz}{1+z^2} = \frac{1}{1-iz},$$

είναι όντως αναλυτική στο πάνω μιγαδικό επίπεδο (έχει πόλο στο $z = -i$) και τείνει στο μηδέν για $z \rightarrow \infty$.

Επανάθροιση *Poisson*

Πολλές φορές το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού δίνεται σε μορφή απειραθροίσματος μια ακολουθίας f_n . Ας υποθέσουμε ότι αυτή εξαρτάται και από μια παράμετρο R στη μορφή $f_n = f(nR)$.

Ανάλογα με την τιμή του R διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- ▶ Η τιμή του R είναι τέτοια ώστε η σειρά δεν μπορεί να προσεγγισθεί με μερικούς όρους:
 - ▶ είτε πρέπει να υπολογισθεί αναλυτικά
 - ▶ είτε να προσεγγισθεί αριθμητικά.
- ▶ Για **μικρές** τιμές του R η σειρά συγκλίνει **γρήγορα**:
 - ▶ οι πρώτοι όροι της επαρκούν για μια πολύ καλή προσέγγιση.
- ▶ Για **μεγάλες** τιμές του R η σύγκλιση είναι **αργή** και απαιτούνται πρακτικά όλοι οι όροι της σειράς.
Σε αυτή την περίπτωση:
 - ▶ είναι δυνατόν να **επαναδιαταχθούν** οι όροι της σειράς.
 - ▶ Στη νέα σειρά που θα προκύψει, μερικοί όροι της να είναι αρκετοί για μια πολύ καλή προσέγγιση της.

Αυτό επιτυγχάνεται με την επανάθροιση κατά Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nR) = \frac{1}{R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(m/R), \quad (74)$$

όπου $\tilde{f}(y)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier

$$\tilde{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2\pi ixy} f(x). \quad (75)$$

Απόδειξη: Ξεκινώντας από το δεξί μέλος έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(m/R) &= \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi imx/R} \\ &= \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x/R - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nR). \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησα την ταυτότητα

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi imx/R} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x/R - n).$$

Παράδειγμα

Ως γνωστόν η λύση της μονοδιάστατης εξίσωσης διάχυσης

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (76)$$

με αρχική συνθήκη $T(x, 0) = \delta(x)$, δίνεται από

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}. \quad (77)$$

- Χρησιμοποιώντας τη βρείτε τη λύση της

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad (78)$$

με αρχική συνθήκη την

$$T(\phi, 0) = \delta(\phi)/R, \quad (79)$$

η οποία σημαίνει ότι η θερμοκρασία είναι αρχικά μηδέν

Λύση: Για να επιλύσουμε το πρόβλημα:

- ▶ Κάνουμε την λύση (77) περιοδική στο x με περίοδο $2\pi R$. Αντικαθιστούμε

$$x \rightarrow R(\phi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (80)$$

και αθροίζουμε ως προς τα n .

- ▶ Το αποτέλεσμα είναι

$$T(\phi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-R^2(\phi-2\pi n)^2/(4t)}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (81)$$

- ▶ Για $R^2 \gg t$, μόνο ο όρος με $n = 0$ συνεισφέρει, αλλά καθώς ο χρόνος περνά όλο η συνεισφορά περισσότερων όρων με $|n| = 1, 2, \dots$, πρέπει να ληφθεί υπόψιν.

- Στην κατάσταση ισοροπίας η θερμοκρασία είναι ίδια σε όλα τα σημεία του κύκλου και όλοι οι όροι του απειραθορίσματος στην (81) συνεισφέρουν το ίδιο. Τότε έχουμε την προσέγγιση μέσω του ολοκληρώματος

$$T_{\infty}(\phi) = T(\phi, \infty) \simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dn e^{-R^2(\phi-2\pi n)^2/(4t)} .$$

Θέτοντας $z = R(2\pi n - \phi)/(2\sqrt{t})$, $dn = \sqrt{t}/\pi dz/R$ έχουμε

$$T_{\infty}(\phi) = \frac{1}{2\pi^{3/2}R} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} .$$

Χρησιμοποιώντας ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} = \sqrt{\pi} ,$$

βρίσκουμε την θερμοκρασία ισοροπίας

$$T_{\infty}(\phi) = \frac{1}{2\pi R} . \quad (82)$$

Μια **ισοδύναμη λύση** προκύπτει αν λύσουμε το πρόβλημα με χωρισμό μεταβλητών και αναζητήσουμε περιοδική λύση με τη σωστή αρχική συνθήκη:

- ▶ Γράφουμε την **ανάλυση Fourier** της θερμοκρασίας

$$T(\phi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) e^{in\phi} . \quad (83)$$

- ▶ Οι συντελεστές ικανοποιούν τη ΔΕ

$$\frac{da_n(t)}{dt} = -\frac{n^2}{R^2} a_n(t) , \quad a_n(0) = \frac{1}{2\pi R} \quad \forall n ,$$

όπου επίσης αναγράψαμε την αρχική συνθήκη.

- ▶ Η τελευταία προκύπτει απ' την αναπαράσταση της δ-συνάρτησης

$$\delta(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} .$$

- ▶ Τελικά βρίσκουμε ότι

$$T(\phi, t) = \frac{1}{2\pi R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2/R^2 t} e^{in\phi} , \quad 0 \leq \phi < 2\pi . \quad (84)$$

Η **ισοδυναμία** των (81) και (84) αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας την **επανάθροιση Poisson**.

- ▶ Στην περίπτωση μας

$$\tilde{f}(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-y^2 t + iy\phi R} .$$

- ▶ Έχουμε ότι

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \tilde{f}(y) e^{2\pi ixy} , \quad x = nR ,$$

οπότε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2 t + iy(\phi R + 2\pi x)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-[y - i(\phi R + 2\pi x)/(2t)]^2 t} e^{-(\phi R + 2\pi x)^2 / (4t)} . \end{aligned}$$

- ▶ Στο ολοκλήρωμα ως προς y θέτουμε $z = y - i(\phi R + 2\pi x)/(2t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2 t} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} .$$

- ▶ Με λίγη άλγεβρα αποδεικνύεται τελικά η **ισοδυναμία** των δύο εναλλακτικών μορφών της λύσης για την θερμοκρασία, (81), (84), δηλαδή ότι

$$\begin{aligned} T(\phi, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-R^2(\phi-2\pi n)^2/(4t)} \\ &= \frac{1}{2\pi R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2/R^2 t} e^{in\phi} . \end{aligned}$$

- ▶ Η **1η έκφραση** συγκλίνει γρήγορα για $t \rightarrow 0$ ή ισοδύναμα για $R \rightarrow \infty$.
- ▶ Η **2η έκφραση** συγκλίνει γρήγορα για $t \rightarrow \infty$ ή ισοδύναμα για $R \rightarrow 0$.
- ▶ Λόγω της παραπάνω ιδιότητάς του, η **επανάθροιση Poisson** χρησιμοποιείται ως τεχνική σε πολλούς διαφορετικούς τομείς, απ' τη στατιστική φυσική ως και τη θεωρία των (υπερ)χορδών.