

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής

Γενικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Πατρών

Πιθανότητες

Περιεχόμενα

- ▶ Χρήσιμοι ορισμοί και ιδιότητες.
- ▶ Χαρακτηριστική συνάρτηση και ροπές.
- ▶ Διωνυμική κατανομή, κατανομές Poisson και Gauss.
- ▶ Θεώρημα της μέσης τιμής.
- ▶ Ενδεικτικά παραδείγματα.

Χρήσιμοι ορισμοί και ιδιότητες

- ▶ Έστω ένα κλειστό σύνολο N δυνατών γεγονότων. Η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός i είναι P_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Θα πρέπει:

- ▶ να είναι **θετικά ορισμένοι**, δηλαδή

$$0 \leq P_i \leq 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

- ▶ Η συνθήκη **κανονικοποίησης**

$$\sum_{i=1}^N P_i = 1. \quad (2)$$

- ▶ Αν τα δυνατά γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους ισχύουν οι εξείς βασικές ιδιότητες:
 - ▶ Η πιθανότητα να συμβούν **ή το γεγονός i ή το γεγονός j** είναι $P_i + P_j$.
 - ▶ Η πιθανότητα να συμβούν **και το γεγονός i και το γεγονός j** είναι $P_i P_j$.

- ▶ Έστω η περίπτωση **συνεχούς κατανομής** εκβάσεων με μεταβλητή $x \in [a, b]$. Η πιθανότητα η έκβαση να είναι μεταξύ x και $x + dx$ είναι $P(x)dx$, όπου $P(x)$ ονομάζεται **πυκνότητα πιθανότητας**. Πρέπει:

- ▶ Να είναι **θετικά ορισμένη**

$$P(x) \geq 0, \quad \forall x, \quad a \leq x \leq b. \quad (3)$$

- ▶ Να ικανοποιεί τη **συνθήκη κανονικοποίησης**

$$\int_a^b dx P(x) = 1. \quad (4)$$

- ▶ Τα παραπάνω εύκολα γενικεύονται για πολλές τυχαίες μεταβλητές, x_1, x_2, \dots

Χαρακτηριστική συνάρτηση και ροπές

- ▶ Η χαρακτηριστική συνάρτηση ορίζεται ως

$$f(z) = \sum_{i=1}^N P_i z^i, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (5)$$

για τη διακριτή περίπτωση και

$$f(z) = \int_a^b dx P(x) z^x, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (6)$$

για τη συνεχή. Πολλές φορές θέτουμε $z = e^{ik}$. Τότε έχουμε

$$f(k) = \int_a^b dx P(x) e^{ikx}, \quad (7)$$

που είναι ο μετασχηματισμός Fourier της πυκνότητας πιθανότητας.

- ▶ Αντιστρόφως, απ' τη χαρακτηριστική συνάρτηση μπορούμε να βρούμε τις πιθανότητες ως

$$P_i = \oint_C dz f(z) z^{-i-1}, \quad (8)$$

όπου C κύκλος με κέντρο το $z = 0$.

- ▶ Οι ροπές ορίζονται ως

$$\rho_n = \langle i^n \rangle = \sum_{i=1}^N P_i i^n, \quad (9)$$

για τη διακριτή περίπτωση και

$$\rho_n = \langle x^n \rangle = \int_a^b dx P(x) x^n, \quad (10)$$

για τη συνεχή.

- Χρησιμοποιώντας τη χαρακτηριστική συνάρτηση έχουμε ότι

$$\rho_n = \left(z \frac{d}{dz} \right)^n f(z) \Big|_{z=1}, \quad (11)$$

ή αν θέσουμε $z = e^{ik}$ έχουμε

$$\rho_n = \frac{1}{i^n} \left(\frac{d}{dk} \right)^n f(k) \Big|_{k=0}. \quad (12)$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση μας δίνει όλες τις ροπές. Γι' αυτό το λόγο ονομάζεται και **γεννήτρια συνάρτηση**.

Στην πράξη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανάπτυξη

$$\begin{aligned} f(k) &= \int_a^b dx P(x) e^{ikx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \int_a^b dx P(x) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

- Ιδιαίτερη σημασία έχει η **διασπορά** ως

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad (14)$$

καθώς μετρά το πόσο διασπείρονται η πιθανές τιμές της

Η διωνυμική κατανομή

Έστω γεγονός που έχει πιθανότητα $0 < p < 1$ να συμβεί.

- ▶ Ποιά είναι η κατανομή πιθανότητας μετά από N προσπάθειες να έχουν συμβεί n γεγονότα;
- ▶ Έστω $P_{n,N}$ η ζητούμενη κατανομή που υπακούει

$$P_{n,N} = pP_{n-1,N-1} + (1-p)P_{n,N-1} + \delta_{n,0}\delta_{N,0} . \quad (15)$$

Αποτελεί το άθροισμα τριών ανεξάρτητων δυνατοτήτων:

- ▶ Ο 1ος όρος την πιθανότητα να έχουμε $n-1$ γεγονότα σε $N-1$ προσπάθειες και να συμβεί ένα επιπλέον γεγονός.
- ▶ Ο 2ος όρος την πιθανότητα να έχουμε n γεγονότα σε $N-1$ προσπάθειες και να μην συμβεί επιπλέον γεγονός.
- ▶ Ο τελευταίος όρος είναι αναγκάιος γιατί δηλώνει τη φυσική απαίτηση ότι με 0 προσπάθειες έχουμε 0 γεγονότα.
- ▶ $P_{n,N} = 0$ αν ένας απ' τους δύο δείκτες είναι αρνητικός.
- ▶ Η λύση θα είναι τέτοια ώστε $P_{n,N} = 0$ αν $n > N$.

- ▶ Ορίζουμε τη **γεννήτρια συνάρτηση**

$$P(x, y) = \sum_{n, N=-\infty}^{\infty} P_{n, N} x^n y^N .$$

- ▶ Εύκολα βρίσκουμε ότι ικανοποιεί την

$$P = p xy P + (1 - p)y P + 1 .$$

- ▶ Η λύση της είναι

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{1}{1 - pxy - (1 - p)y} = \sum_{N=0}^{\infty} [pxy + (1 - p)y]^N \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N - n)!} p^n (1 - p)^{N-n} x^n y^N . \end{aligned}$$

- ▶ Τελικά παίρνουμε τη **διωνυμική κατανομή**

$$P_{n, N}(p) = \frac{N!}{n!(N - n)!} p^n (1 - p)^{N-n} , \quad n \leq N . \quad (16)$$

Σημειώνω ότι αυτή είναι σωστά κανονικοποιημένη γιατί

$$\sum_{n=0}^N P_{n, N}(p) = 1 , \quad \forall N \in \mathbb{Z} \text{ και } 0 < p < 1 . \quad (17)$$

Η κατανομή *Poisson*

Ας θεωρήσουμε στην διωνυμική κατανομή το όριο

$$N \gg 1, \quad Np = a = \text{πεπερασμένο}. \quad (18)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling

$$(N + b)! \simeq \sqrt{2\pi} e^{-N} N^{N+b+1/2}, \quad \text{για } N \gg 1 \text{ και } b = \text{πεπερασμένο}, \quad (19)$$

καθώς και ότι

$$(1 - p)^{N-n} = \left(1 - \frac{a}{N}\right)^{N-n} \simeq e^{-a}, \quad \text{καθώς } N \rightarrow \infty,$$

βρίσκουμε την *κατανομή Poisson*

$$P_n(a) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}. \quad (20)$$

Η κατανομή *Poisson* εμφανίζεται σε συστήματα με **μεγάλο αριθμό μετρήσεων/γεγονότων** το **καθένα** από τα οποία είναι **σπάνιο**. Κλασική περίπτωση αποτελεί η μετατροπή ασταθών

- ▶ Η κατανομή Poisson είναι σωστά κανονικοποιημένη

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(a) = 1, \quad \forall a.$$

- ▶ Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(a) z^n = e^{-a(1-z)}.$$

- ▶ Οι ροπές είναι

$$\langle n^m \rangle = e^{-a} \left(z \frac{d}{dz} \right)^m e^{az} \Big|_{z=1},$$

απ' την οποία υπολογίζουμε

$$\langle n \rangle = a, \quad \langle n^2 \rangle = a(a+1), \quad \langle n^3 \rangle = a(a^2 + 3a + 1), \quad \text{κλπ},$$

οπότε για τη διασπορά έχουμε

$$\sigma = \sqrt{a}.$$

Η κατανομή *Gauss*

Ας θεωρήσουμε στην διωνυμική κατανομή το όριο

$$N \gg 1, \quad p = \text{πεπερασμένο}. \quad (21)$$

Θα θεωρήσουμε ισοδύναμα το όριο $a \gg 1$ στην κατανομή Poisson (20), αναπτύσσοντας γύρω απ' το μέγιστό της.

- Για να βρώ το μέγιστο της κατανομής για $m \gg 1$ χρησιμοποιώ την ανάπτυξη Stirling (19). Άρα

$$P_m \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{a}{m}\right)^{m-1/2} e^{m-a} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{af(x)},$$

όπου

$$f(x) = x - (x+1) \ln(x+1), \quad x = \frac{m}{a} - 1.$$

Έχουμε ότι

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1,$$

άρα $x = 0$ είναι μέγιστο

- ▶ Αναπτύσσοντας γύρω απ' το $x = 0$ έχουμε

$$P_m \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-ax^2/2}.$$

- ▶ Ισχύει ότι $P_m dm = P_a(x) dx$ και $dm/dx = a$, οπότε

$$P_a(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-ax^2/2}, \quad (22)$$

που είναι η ζητούμενη **κατανομή Gauss**.

- ▶ Για τη μέση τιμή και τη διασπορά βρίσκουμε

$$\langle x \rangle = 0, \quad \sigma^2 = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{a}.$$

- ▶ Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$f(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} e^{-ax^2/2} = e^{-\frac{k^2}{2a}}.$$

- ▶ Στο όριο **μηδενικής διασποράς**, ή ισοδύναμα στην περίπτωση μας, όταν $a \rightarrow \infty$, έχουμε

$$\lim_{a \rightarrow \infty} P_a(x) = \delta(x), \quad (23)$$

που σημαίνει ότι είναι η δ συνάρτηση

Το θεώρημα της μέσης τιμής

Έστω N ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ με κατανομές και γεννήτριες συναρτήσεις $P_i(x_i)$ και $f_i(k)$, αντίστοιχα.

Ποιά είναι η πυκνότητα πιθανότητας για μια συνάρτηση $z = \phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ και ποιά η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση;

- ▶ Επειδή πρόκειται για ανεξάρτητες μεταβλητές έχουμε για την πυκνότητα πιθανότητας

$$P(x_1, x_2, \dots, x_N) d^N \mathbf{x} = P_1(x_1) P_2(x_2) \dots P_N(x_N) d^N \mathbf{x}, \quad (24)$$

όπου $d^N \mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_N$.

- ▶ Για τη γεννήτρια συνάρτηση έχουμε

$$F_N(k) = \int d^N \mathbf{x} P_1(x_1) P_2(x_2) \dots P_N(x_N) e^{ik\phi(x_1, x_2, \dots, x_N)} .$$

- ▶ Ας υποθέσουμε ότι

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} . \quad (25)$$

Τότε βλέπουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση γράφεται ως το γινόμενο των αντίστοιχων γεννητριών συναρτήσεων

$$F_N(k) = f_1\left(\frac{k}{N}\right) f_2\left(\frac{k}{N}\right) \dots f_N\left(\frac{k}{N}\right) . \quad (26)$$

- ▶ Ας υποθέσουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή x έχει πυκνότητα πιθανότητας $P(x)$ και γεννήτρια συνάρτηση $f(k)$.
 - ▶ Με κατάλληλο ορισμό της x μπορούμε να εκλέξουμε $\langle x \rangle = 0$, οπότε $\langle x^2 \rangle = \sigma^2$.
 - ▶ Έστω ότι την έχουμε μετρήσει N φορές με αποτελέσματα x_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Τότε, σύμφωνα με την (26), η γεννήτρια συνάρτηση για τη μέση τιμή των μετρήσεων z θα είναι

$$F_N(k) = \left[f\left(\frac{k}{N}\right) \right]^N . \quad (27)$$

- ▶ Για $N \gg 1$ έχουμε

$$F_N(k) = \left(1 - \frac{k^2 \sigma^2}{2N^2} + \dots \right)^N .$$

- ▶ Αν ορίσουμε

$$\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \Sigma = \text{πεπερασμένο} ,$$

έχουμε ότι

$$F(k) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(k) = e^{-\frac{k^2 \Sigma^2}{2}} ,$$

η οποία είναι η γεννήτρια συνάρτηση της κατανομής Gauss

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Sigma} e^{-\frac{z^2}{2\Sigma^2}} .$$

- ▶ Αυτό είναι το θεώρημα του **κεντρικού ορίου**: **Ανεξάρτητα** από τη μορφή της κατανομής που ακολουθεί μια **τυχαία** μεταβλητή, η **μέση** τιμή ενός **μεγάλου αριθμού** μετρήσεων της ακολουθεί κατανομή **Gauss**.

Παράδειγμα 1ο

Κανόνι εκτοξεύει μεγάλο αριθμό σφαιριδίων με το ίδιο μέτρο ταχύτητας και με ισοπίθανη κατανομή σε όλες τις γωνίες με $\theta \in [0, \pi/4]$. Οι κρούσεις με το έδαφος θεωρούνται πλαστικές.

- ▶ Ποιά κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή του βεληνεκούς;
- ▶ Αν χωρίσουμε την απόσταση απ' το σημείο βολής έως το σημείο μέγιστου βεληνεκούς σε 2 ίσα μέρη, βρείτε το ποσοστό σφαιριδίων που συγκεντρώνονται στα δύο μέρη.
- ▶ Με ποιό τρόπο πρέπει να μοιραστεί η απόσταση ώστε να έχουμε τον ίδιο αριθμό σφαιριδίων και στα δύο μέρη;

Λύση: Το βεληνεκές δίνεται απ' τη σχέση

$$s(\theta) = s_0 \sin 2\theta, \quad s_0 = \frac{v_0^2}{g}.$$

και ισοκατανομή στις γωνίες σημαίνει ότι

$$P(\theta) = \frac{4}{\pi}.$$

► Άρα έχουμε ότι

$$P(s)ds = P(\theta)d\theta \implies P(s) = \frac{2}{\pi\sqrt{s_0^2 - s^2}}. \quad (28)$$

► Έστω $N \gg 1$ ο συνολικός αριθμός σφαιριδίων που εκτοξεύστηκαν. Στο 1ο διάστημα με $s \in (0, s_0/2)$ έπεσαν

$$N_1 = N \int_0^{s_0/2} P(s)ds = \frac{2}{\pi} N \int_0^{s_0/2} \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \frac{N}{3}.$$

Στο διάστημα με $s \in (s_0/2, s_0)$ έπεσαν

$$N_2 = N \int_{s_0/2}^{s_0} P(s)ds = \frac{2}{\pi} N \int_{s_0/2}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \frac{2N}{3}.$$

- Έστω d η απόσταση απ' το σημείο βολής σε σημείο το οποίο χωρίζει το διάστημα μέγιστου βεληνεκούς σε δύο μέρη. Για να έχουμε τον ίδιο αριθμό σφαιριδίων θα πρέπει να ισχύει

$$\int_0^d P(s) ds = \int_d^{s_0} P(s) ds \implies \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{d}{s_0} = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{d}{s_0} .$$

- Πρέπει να επιλύσουμε την εξίσωση

$$\sin^{-1} \frac{d}{s_0} = \cos^{-1} \frac{d}{s_0} \implies \frac{d}{s_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{s_0}\right)^2} .$$

Τελικά βρίσκουμε

$$d = \frac{s_0}{\sqrt{2}} \simeq 0.707s_0 . \quad (29)$$

Παράδειγμα 2ο

- ▶ Υπολογίστε την πυκνότητα πιθανότητας $P(s)$, όπου s η απόσταση δύο τυχαίων σημείων στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου.
- ▶ Δώστε τη γενική έκφραση για την $\langle s^n \rangle$.
- ▶ Ποιά είναι η $\langle s \rangle$, η $\langle s^2 \rangle$ και η διασπορά;

Λύση:

- ▶ Έστω τα τυχαία σημεία A και B στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με συντεταγμένες

$$A: (x, y) = (1, 0),$$

$$B: (x, y) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (30)$$

- ▶ Η απόστασή τους είναι

$$s = \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} = 2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq s \leq 2. \quad (31)$$

- Επειδή τα σημεία είναι τυχαία, η γωνιακή τους κατανομή είναι

$$P(\theta) = \frac{1}{\pi} . \quad (32)$$

- Άρα

$$P(s) = P(\theta) \frac{d\theta}{ds} = \frac{1/\pi}{\sqrt{1-s^2/4}} . \quad (33)$$

Εκ' κατασκευής η κανονικοποίησή της είναι η σωστή, δηλαδή

$$\int_0^2 ds P(s) = 1 .$$

- Εξ' ορισμού

$$\begin{aligned} \langle s^n \rangle &= \int_0^2 ds P(s) s^n = \frac{1}{\pi} \int_0^2 ds \frac{s^n}{\sqrt{1-s^2/4}} \\ &= \frac{2^n}{\pi} \int_0^1 dx x^{n/2-1/2} (1-x)^{-1/2} \\ &= \frac{2^n}{\pi} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} , \end{aligned}$$

όπου $B(x, y)$ η Βήτα συνάρτηση

- Χρησιμοποιώντας ότι $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, έχουμε ότι

$$\langle s^n \rangle = \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}. \quad (34)$$

- Για $n = 1$ έχουμε

$$\langle s \rangle = \frac{2 \Gamma(1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(3/2)} = \frac{4}{\pi} \simeq 1.27 > 1. \quad (35)$$

Η μέση τιμή της απόστασης δύο τυχαίων σημείων στην περιφέρεια ενός κύκλου είναι μεγαλύτερη της ακτίνας του. Για $n = 2$ έχουμε

$$\langle s^2 \rangle = \frac{4 \Gamma(3/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(2)} = 2. \quad (36)$$

Άρα η διασπορά είναι

$$\sigma = \sqrt{2 - \frac{16}{\pi^2}} \simeq 0.62. \quad (37)$$

Παράδειγμα 3ο

Για την τυχαία μεταβλητή x η κατανομή πιθανότητας είναι

$$P(x) = e^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (38)$$

- ▶ Βρείτε την μέση τιμή $\langle x \rangle$ και την τυπική απόκλιση σ .

Δύο τυχαίες μεταβλητές x_1, x_2 είναι στατιστικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν την (38).

- ▶ Βρείτε τις $\langle x_1 + x_2 \rangle$ και $\langle x_1 x_2 \rangle$.
- ▶ Ποιά είναι η αντίστοιχη χαρακτηριστική συνάρτηση;
- ▶ Βρείτε την κατανομή για την τυχαία μεταβλητή $s = x_1 + x_2$.
- ▶ Βρείτε την κατανομή για την τυχαία μεταβλητή $r = x_1 - x_2$.

Λύση:

- ▶ Από τον ορισμό

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} dx x e^{-x} = \Gamma(2) = 1 .$$

και

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-x} = \Gamma(3) = 2 \quad \implies \quad \sigma^2 = 1 .$$

- ▶ Έχουμε

$$\langle x_1 + x_2 \rangle = 1 + 1 = 2, \quad \langle x_1 x_2 \rangle = 1 \cdot 1 = 1 .$$

- ▶ Εξ' ορισμού η γεννήτρια συνάρτηση για τις x_1 και x_2 είναι

$$\Phi(k) = \int_0^{\infty} dx e^{-x(1-ik)} = \frac{1}{1-ik} .$$

- ▶ Από τη θεωρία η γεννήτρια συνάρτηση για την τυχαία μεταβλητή $s = x_1 + x_2$ είναι το γινόμενο των επιμέρους:

$$\Phi_s(k) = [\Phi(k)]^2 = \frac{1}{(1 - ik)^2} .$$

Τότε

$$P(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-iks}}{(1 - ik)^2} .$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

- ▶ Χρησιμοποιούμε ως περίγραμμα ολοκλήρωσης ημικύκλιο άπειρης ακτίνας εκτεινόμενο στον κάτω μιγαδικό επίπεδο.
- ▶ Ο διπλός πόλος είναι στο $k = -i$.

Έτσι βρίσκουμε

$$P(s) = s e^{-s} , \quad s \geq 0 . \quad (39)$$

- ▶ Στην περίπτωση της τυχαίας μεταβλητής $r = x_1 - x_2$ η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\Phi_r(k) = \Phi(k)\Phi(-k) = \frac{1}{1+k^2} .$$

Τότε

$$P(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ikr}}{1+k^2} .$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

- ▶ Χρησιμοποιούμε ως περίγραμμα ολοκλήρωσης ημικύκλιο άπειρης ακτίνας εκτεινόμενο στον άνω (κάτω) μιγαδικό επίπεδο για r αρνητικό (θετικό).
- ▶ Αντίστοιχα, ο απλός πόλος είναι στο $k = i$ ($k = -i$).

Έτσι βρίσκουμε

$$P(r) = \frac{1}{2} e^{-|r|} , \quad -\infty < r < \infty . \quad (40)$$