ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΗΜΜ κύματα δημιουργούνται από επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία και διαδίδονται σε όλα τα υλικά μέσα (ακόμη και στο κενό). Πρόκειται περί ταλαντώσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

- **Οι εξισώσεις Maxwell (στο κενό)**

1. Ο νόμος του Gauss για το ηλ. πεδίο

Η ολική ροή του ηλ. πεδίου που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια Α ισούται με το πηλίκο του ολικού φορτίου q που περικλείεται από την επιφάνεια Α δια της διαπερατότητος του κενού ε_o. Η μαθηματική έκφραση του νόμου είναι $\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = q/\varepsilon_o$ (1a)

2. Ο νόμος του Gauss για το μαγν. πεδίο

Η ολική ροή του μαγν. πεδίου που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια Α ισούται με μηδέν. Η μαθηματική του έκφραση είναι $\oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$ (1β)

3. Ο νόμος του Faraday

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλ. πεδίου (ή η κυκλοφορία του ηλ. πεδίου) υπολογιζόμενο κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής C ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής Φ_m που διαπερνά την επιφάνεια A η οποία περικλείεται από την καμπύλη C. Η μαθηματική έκφραση του νόμου είναι

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad (1\gamma)$$

Ισοδύναμα, ο νόμος Faraday (έχομε δει) μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1\gamma^*)$$

4. Ο νόμος των Ampere-Maxwell

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγν. πεδίου (ή η κυκλοφορία του μαγν. πεδίου) υπολογιζόμενο κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής C ισούται με το άθροισμα του ολικού ρεύματος αγωγιμότητος, I_C, το οποίο διαπερνά μέσα από την καμπύλη C συν το ρεύμα μετατόπισης, $\varepsilon_o d\Phi_E/dt$. Η μαθηματική του νόμου έκφραση είναι

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o\left(I_C + \varepsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt}\right), \qquad (1\delta)$$

όπου μ_o είναι η διαπερατότης του κενού και Φ_E είναι η ηλετρ. ροή που διαπερνά την επιφάνεια A η οποία περικλείεται από την καμπύλη C.

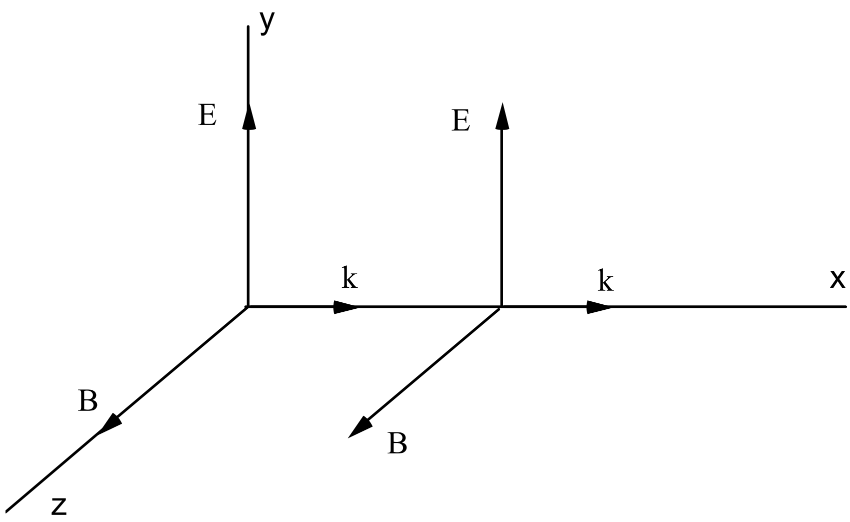
Ισοδύναμα, ο νόμος Ampere-Maxwell (έχομε δει) μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή $\vec{\nabla} \otimes \vec{B} = \varepsilon_o \mu_o \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ *(1δ*)*

Από τους δύο τελευταίους νόμους είναι εμφανές ότι χρονο-εξαρτώμενα ηλεκτρικά πεδία οδηγούν στην ύπαρξη χρονο-εξαρτώμενων μαγνητικών πεδίων, και αντίστροφα. Ένα δεύτερο σημείο που πρέπει να τονιστεί είναι οι εξισώσεις Maxwell επιδέχονται κυματικές λύσεις, άρα προβλέπουν την κυματική φύση του ΗΜΜ πεδίου.

Στο κενό, $q=0$ και $I_C=0$.

- ***ΕΠΙΠΕΔΑ ΗΜΜ ΚΥΜΑΤΑ***

Για ευκολία μας, υποθέτουμε ότι τα πεδία είναι γραμμικώς πολωμένα, δηλ. τα διανύσματα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι παράλληλα προς συγκεκριμένες διευθύνσεις, π.χ. παράλληλα προς τους άξονες y και z του σχήματος, αντίστοιχα



που σημαίνει ότι τα μέτρα των πεδίων εξαρτώνται μόνο από τη συντεταγμένη x, δηλ. $\vec{E} = E(x,t)\hat{y}$ *και* $\vec{B} = B(x,t)\hat{z}$.

Οπότε σε καρτεσιανές συντεταγμένες, οι σχέσεις (1γ) και (1δ*) γράφονται,*

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t},$$
$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\varepsilon_o \mu_o \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Παραγωγίζοντας τη πρώτη ως προς x και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα με τη δεύτερη παίρνομε,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial x} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

ή

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (2a)$$

Παρομοίως παραγωγίζοντας τη δεύτερη ως προς x και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα με τη πρώτη παίρνομε,

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\varepsilon_o \mu_o \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial t} = -\varepsilon_o \mu_o \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E}{\partial x} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial t} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

ή

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \qquad (2\beta)$$

δηλ. και το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο πληρούν την εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

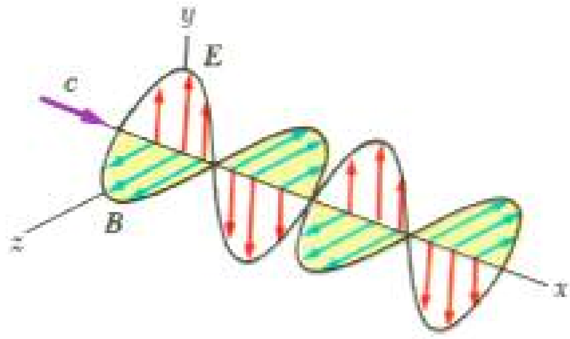
όπου c είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος και y(x,t) το πλάτος της κυματικής διαταραχής.

Παρατηρούμε συνεπώς ότι οι εξισώσεις (2a) και (2β) έχουν τη μορφή της εξίσωσης κύματος που διαδίδεται με ταχύτητα:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} = \frac{1}{\sqrt{8.85 \times 10^{-12}\, Cb^2 / Nt \cdot m^2 \, 4\pi \times 10^{-7}\, Wb / A \cdot m}} = 2.99 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

Οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (2a) και (2β) είναι:

$$E=E_o\cos(kx-\omega t) \quad \text{και} \quad B=B_o\cos(kx-\omega t)$$



Ενδιαφέρουσες σχέσεις: $\omega / k = c$

$E_o / B_o = c$

$E / B = c$

- Διάνυσμα Poynting: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_o}\vec{E} \otimes \vec{B}$

παριστάνει την ΗΜΜ ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που διαπερνά την μονάδα επιφανείας κάθετα προς την διεύθυνση διάδοσης του κύματος (μονάδες: Watt/m^2)

(επειδή ο επεξεργαστής κειμένου που χρησιμοποιώ δεν μου βγάζει στον pdf-file το σύμβολο του εξωτερικού γινομένου ×, γι'αυτό χρησιμοποιώ το σύμβολο ⊗)

Για επίπεδο ΗΜΜ κύμα: $S = \frac{1}{\mu_o c} E^2 = \frac{c}{\mu_o} B^2$

Ως ένταση του ΗΜΜ κύματος ορίζεται η μέση τιμή ως προς χρόνο του διανύσματος Poynting, δηλ.

$$I = <S> = \frac{E_o B_o}{2\mu_o} = \frac{E_o^2}{2\mu_o c} = \frac{cB_o^2}{2\mu_o}$$

<u>*Απόδειξη:*</u>

$$<S> = \frac{1}{T}\int_0^T S dt = \frac{1}{\mu_o c T} E_o^2 \int_0^T \cos^2(kx-\omega t) dt = \frac{E_o^2}{\mu_o c T}\int_0^T \frac{1+\cos 2(kx-\omega t)}{2} dt$$

$$= \frac{E_o^2}{\mu_o c T}\left(\frac{T}{2} + \frac{\sin 2(kx-\omega t)}{-2\omega}\Big|_0^T\right) = \frac{1}{2}\frac{E_o^2}{\mu_o c}$$

Πυκνότης ενέργειας ηλεκτρ. πεδίου: $u_E = \varepsilon_o E^2/2$

Πυκνότης ενέργειας μαγν. πεδίου: $u_B = B^2/2\mu_o$

άρα $u_E = u_B$

Πυκνότητα ενέργειας ΗΜΜ κύματος: $u = u_E + u_B$

άρα $<u> = \varepsilon_o E^2 = B^2/\mu_o$

ΗΜΜ κύμα που προσπίπτει πάνω σε μια επιφάνεια:

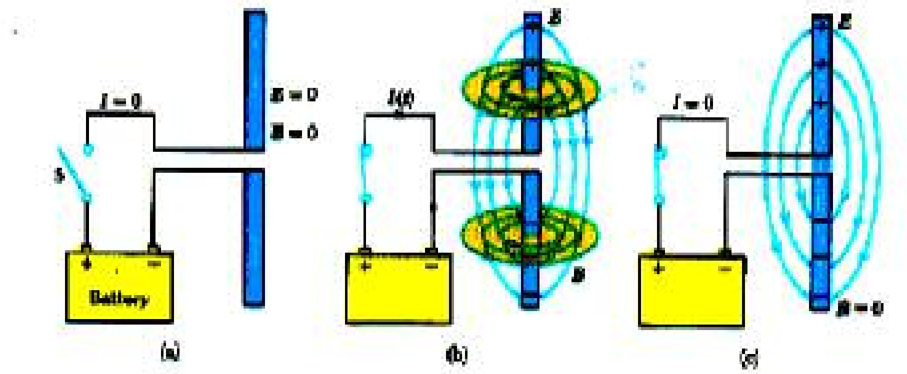
Ορμή ΗΜΜ κύματος: $p = \frac{U}{c}$ *(για ολική απορρόφηση)* *όπου U είναι η συνολική ενέργεια που μεταφέρει το ΗΜΜ κύμα πάνω στην επιφάνεια μέσα σε χρόνο t.*

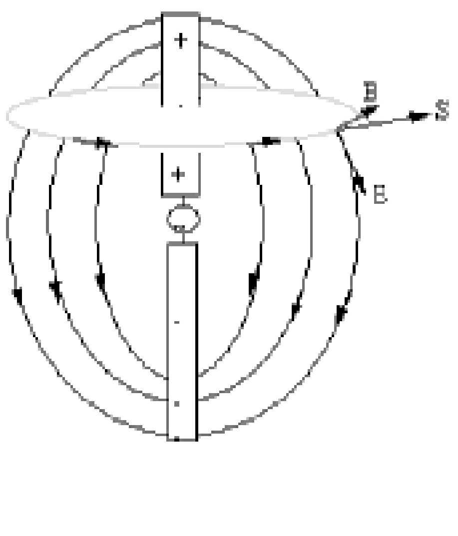
Πίεση ΗΜΜ κύματος: $P = \dfrac{S}{c}$ ***(για ολική απορρόφηση)***

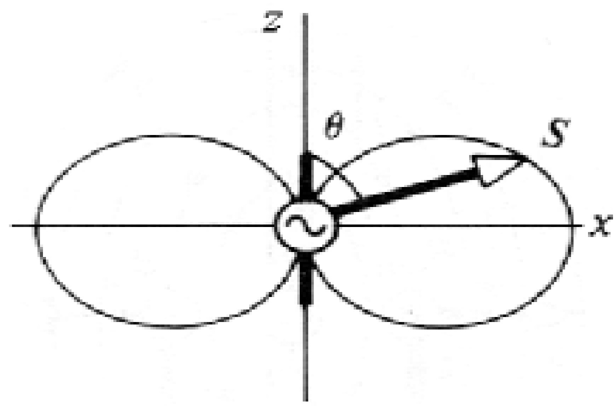
που ασκεί πάνω στην επιφάνεια

Άσκηση: *Θεωρούμε ευθύγραμμο σύρμα ακτίνος a, μήκους l, και αντιστάσεως R. Αν το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα I, να υπολογιστεί το διάνυσμα Poynting κατά μέτρο και διεύθυνση. (παράδειγμα 34.4 Serway)*

Κεραία εκπομπής Hertz ή $\lambda/2$







κατανομή donut