ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2007-8

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΜΙΧΑΗΛ ΒΕΛΓΑΚΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ:
α) R. A. SERWAY, PHYSICS FOR SCIENTISTS & ENGINEERS, ΤΟΜΟΙ I & III
β) H.D. YOUNG, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ, ΤΟΜΟΣ Α'

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1) Συστήματα μονάδων και θεμελιώδεις μονάδες:

$$CGS = \begin{cases} cm \\ gr \\ sec \end{cases} \qquad MKSA\,(or\ SI) = \begin{cases} m \\ Kgr \\ sec \\ Ampere \end{cases}$$

1^{α}) Παράγωγοι μονάδες:

- π.χ. το μέγεθος ταχύτητα
  μονάδα (στο CGS) 1cm/sec   και (στο MKSA) 1m/sec

- π.χ. το μέγεθος επιτάχυνση
  μονάδα (στο CGS) $1cm/sec^2$ και (στο MKSA) $1m/sec^2$

- π.χ. το μέγεθος δύναμη
  μονάδα (στο CGS) 1dyne και (στο MKSA) 1Nt

Σχέση παραγώγου μονάδος με την θεμελιώδη:

π.χ. για την μονάδα 1dyne: εφαρμόζουμε τον 2^o νόμο του Νεύτωνα F=mγ, αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες μονάδες:

$$1dyne = 1gr \cdot 1cm/sec^2 \quad \text{και} \quad 1Nt = 1Kgr \cdot m/sec^2$$

(ενώ η μεταξύ τους σχέση είναι: $1Nt=10^5 dynes$)

Μονάδες μήκους στο αγγλικό σύστημα: 1 yd (γιάρδα), 1 ft, 1 in

(1yd=91.4cm, 1yd=3ft, 1ft=12in, 1in=2.54cm)

2) Τρόπος επίλυσης των ασκήσεων

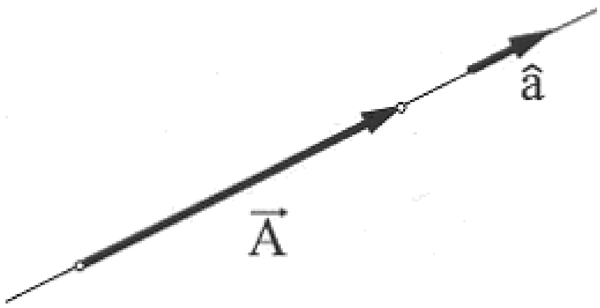
- Αναφέρεται ο νόμος της φυσικής που πρόκειται να εφαρμοστεί
- Γράφεται τη μαθηματική σχέση του νόμου
- Επεξηγείτε τα μαθηματικά σύμβολα της σχέσης
- Επιλύεται τη προκύπτουσα μαθηματική εξίσωση.

3) Διανυσματικός λογισμός (περιληπτικά)

Διανύσματα: είναι μεγέθη τα οποία για να οριστούν απαιτείται να δοθεί το μέτρον (με τη μονάδα μέτρησης) και η διεύθυνση και φορά του μεγέθους.

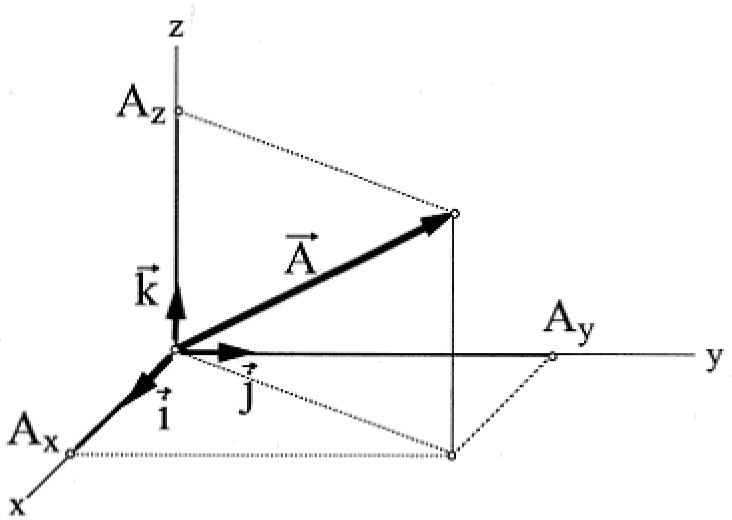
<u>Βαθμωτά μεγέθη:</u> Για να οριστούν τα μεγέθη αυτά απαιτείται να δοθεί μόνο το μέτρο τους (π.χ. η πίεση).

<u>Συμβολισμός των διανυσμάτων:</u> $\vec{A} = A\hat{a}$ ή $\vec{A} = |\vec{A}|\hat{a}$, *όπου* A *ή* $|\vec{A}|$ είναι το μέτρο και $\hat{a}$ το μοναδιαίο διάνυσμα, δηλ. $|\hat{a}| = 1$.



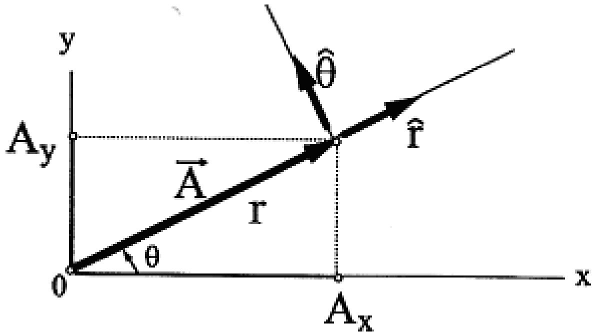
Συνιστώσες του διανύσματος –Συστήματα συντεταγμένων

Καρτεσιανές συντεταγμένες: $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$



Πολικές συντεταγμένες: $\vec{A} = (A_r, A_\theta)$, $\vec{r} = (r, \theta)$

Μετασχηματισμός: x=rcosθ, y=rsinθ ή θ=tan^{-1}(y/x), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

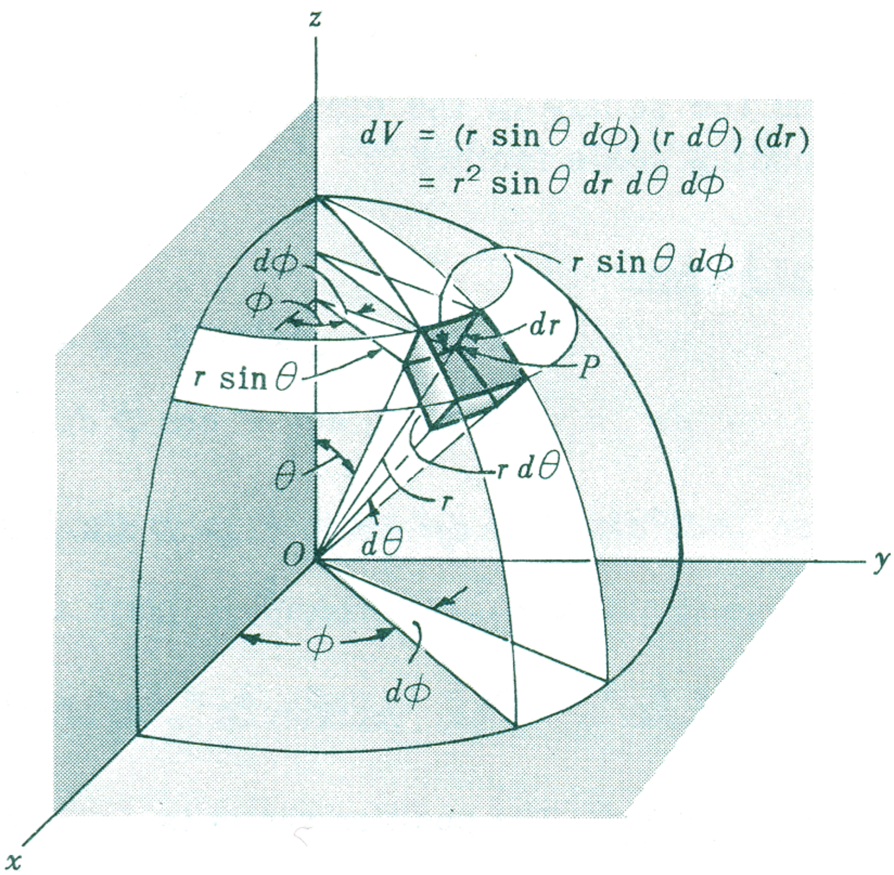


Κυλινδρικές συντεταγμένες: $\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_z)$, $\vec{r} = (r,\theta,z)$

Μετασχημ.: x=rcosθ, y=rsin, z=z, ή θ=tan^{-1}*(y/x),* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *, z=z.*

Σφαιρικές συντεταγμένες: $\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_\varphi)$, $\vec{r} = (r,\theta,\varphi)$

Μετασχηματισμός: x=rsinθcosφ, y=rsinθsinφ, z=rcosθ, ή φ=tan^{-1}*(y/x), θ=cos*$^{-1}$*(z/r),* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *.*

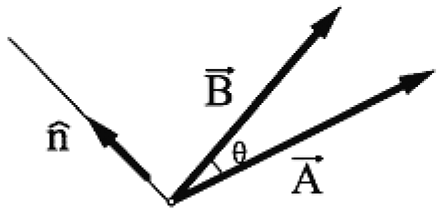


Πράξεις πάνω στα διανύσματα:

1. Ισότης 2 διανυσμάτων: $\vec{A} = \vec{B}$, σημαίνει $A_x=B_x$, ...
2. Πρόσθεση 2 διανυσμάτων: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ($\vec{C}$ είναι το άθροισμά τους), σημαίνει $C_x=A_x+B_x$, $C_y=A_y+B_y$,...

3. Γινόμενο 2 διανυσμάτων:
   (α) Αριθμητικό ή εσωτερικό γινόμενο: $\vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{B}$ (όπου $\vec{C}$ είναι το αριθμ. γινόμενό τους με συνιστώσες $C_x=A_xB_x$, $C_y=A_yB_y$, $C_z=A_zB_z$, ή $C=ABcos\theta$, όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{A},\vec{B}$).

(β) Διανυσματικό ή εξωτερικό γινόμενο: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ (όπου $\vec{C}$ είναι το διαν. γινόμενό τους $\vec{C} = AB\,sin\theta\,\hat{n}$, $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{A},\vec{B}$, βλέπε σχήμα)



ή σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + ...\kappa\lambda\pi$$

όπου $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x,y,z.

(γ) Γινόμενο διανύσματος επί αριθμού: $\lambda\vec{A} = (\lambda A)\hat{a}$

4. Διαίρεση 2 διανυσμάτων: $\dfrac{\vec{A}}{\vec{B}}$ απαγορεύεται.

(α) Διαίρεση διανύσματος δια αριθμού: $\dfrac{\vec{A}}{\lambda} = (\dfrac{A}{\lambda})\hat{a}$

5. Παραγώγιση διανύσματος $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ σημαίνει:

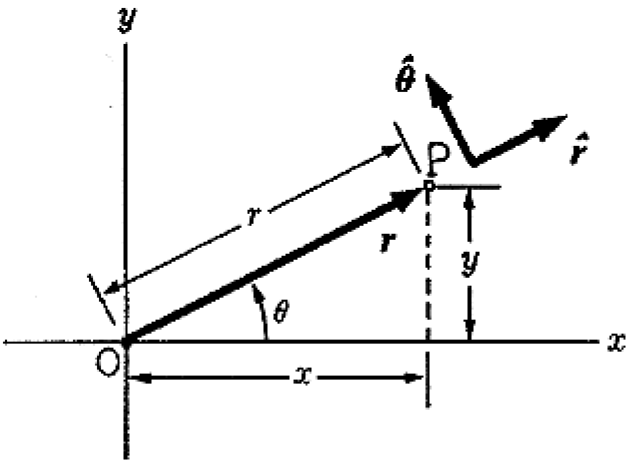
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$

6. Ολοκλήρωση διανύσματος $\int \vec{A}dt$ σημαίνει:

$$\int \vec{A}dt = \vec{i}\int A_x dt + \vec{j}\int A_y dt + \vec{k}\int A_z dt$$

Ταχύτης και επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες.

Έστω $\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\,\hat{\mathbf{r}}$ το διάνυσμα θέσης ενός σημείου P (τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ κατευθύνονται κατά τη διεύθυνση που αυξάνουν τα μεγέθη r και θ, αντίστοιχα - βλέπε Σχήμα 1).



Σχήμα 1

---

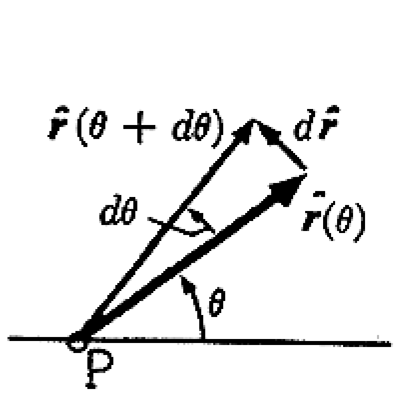
1) Η ταχύτης του σημείου P υπολογίζεται ως εξής:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \upsilon_r\,\hat{r} + r\omega\hat{\theta} \qquad (1)$$

όπου $\upsilon_r = dr/dt$ είναι η **ακτινική** ταχύτης (κατά μήκος του άξονα r) και $\omega = d\theta/dt$ είναι η γωνιακή ταχύτης του σημείου P. Ο τελευταίος όρος στην (1) αποδεικνύεται ως εξής:

Από το διανυσματικό τρίγωνο του Σχήματος 2 έχομε:

$d\hat{r} = (|\hat{r}|\,d\theta)\,\hat{\theta} = d\theta\,\hat{\theta}$, συνεπώς: $\dfrac{d\hat{r}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = \omega\hat{\theta}$.



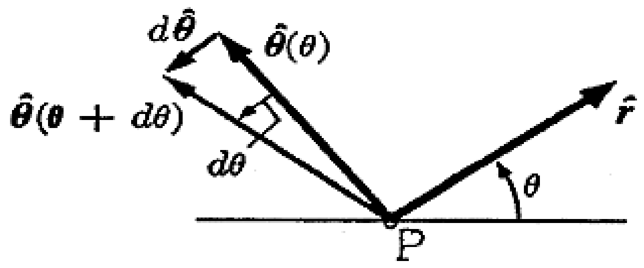
Σχήμα 2

2) Η επιτάχυνση του σημείου P υπολογίζεται ως εξής:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon_r \hat{\mathbf{r}} + r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{d\upsilon_r}{dt}\hat{\mathbf{r}} + \upsilon_r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\omega\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d\omega}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\omega\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} \qquad (2)$$

όπου $\frac{d\upsilon_r}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \equiv a_r$ είναι η ακτινική επιτάχυνση (κατά μήκος του άξονα r).

Η τελευταία παράγωγος στη (2) υπολογίζεται ως εξής:



Σχήμα 3

Από το διανυσματικό τρίγωνο του Σχήματος 3 έχομε:

$d\hat{\theta} = (|\hat{\theta}|\, d\theta)\,(-\hat{r}) = -d\theta\, \hat{r}$, (εφόσον $|\hat{\theta}| = |\hat{r}| = 1$), συνεπώς:

$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r} = -\omega\hat{r}$. Αντικαθιστώντας στην (2) λαμβάνομε,

$$\vec{\mathbf{a}} = a_r\hat{\mathbf{r}} - r\omega^2\hat{\mathbf{r}} + 2\upsilon_r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\alpha\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (3)$$

Ο τελευταίος όρος στη (3) καλείται **επιτρόχιος** επιτάχυνση, $\vec{\mathbf{a}}_t = r\alpha\hat{\boldsymbol{\theta}}$, όπου $\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ είναι η **γωνιακή** επιτάχυνση. Ο προτελευταίος όρος $\vec{\mathbf{a}}_C = 2\upsilon_r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$ καλείται επιτάχυνση **Coriollis**, και ο δεύτερος όρος $\vec{\mathbf{a}}_R = -r\omega^2\hat{\mathbf{r}}$ καλείται **κεντρομόλος** επιτάχυνση ο οποίος κατευθύνεται πάντοτε ακτινικά προς τον άξονα (ή το σημείο) περιστροφής, ο δε πρώτος όρος $a_r\hat{\mathbf{r}}$ παριστάνει την **ακτινική** επιτάχυνση που σχετίζεται με την αύξηση ή τη μείωση της ακτίνος περιστροφής r του σημείου P.

Αν το στερεό σώμα εκτελεί **περιστροφική** κίνηση ή το σημείο P εκτελεί **κυκλική** κίνηση, τότε εξ ορισμού $a_r = \upsilon_r = 0$, οπότε οι σχέσεις (1) και (3) παίρνουν την απλή μορφή (μην μπερδέψετε τα σύμβολα a_r και a_R),

$$\vec{\upsilon} = r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$\vec{\mathbf{a}} = -r\omega^2\hat{\mathbf{r}} + r\alpha\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

[που είναι οι σχέσεις (9-13) και (9-14)-(9-15), αντίστοιχα, του H.D. Young. Βλέπε επίσης Σχήμα 9-8 του H.D. Young]

1η ΕΝΟΤΗΤΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ

- **Φυσική:** ενδιαφέρεται να ερμηνεύσει τα φυσικά φαινόμενα. Συγκεκριμένα αναζητεί τις προηγούμενες καταστάσεων ενός φαινομένου και προσπαθεί να ερμηνεύσει την ακολουθία αυτών των καταστάσεων (και η Μεταφυσική έχει το ίδιο αντικείμενο!)

- **Χρόνος:** είναι μια αφηρημένη έννοια σε αντιδιαστολή με την "διάρκεια", που εκφράζει "βίωμα". Ο χρόνος είναι μιά απεριόριστη συνέχεια και ομογενής έννοια, συνεπώς είναι κάτι ποσοτικό.

- **Χώρος:** διαφέρει της έννοιας "έκταση". Ο χώρος είναι μια απεριόριστη συνέχεια που πλαισιώνει τα αντικείμενα, ενώ η έκταση είναι ένα τμήμα της συνέχειας αυτής **(κατά Einstein, δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ χώρου και χρόνου. Ορίζει τον 4-διάστατο χώρο με συνιστώσες (x,y,z,ct)).**

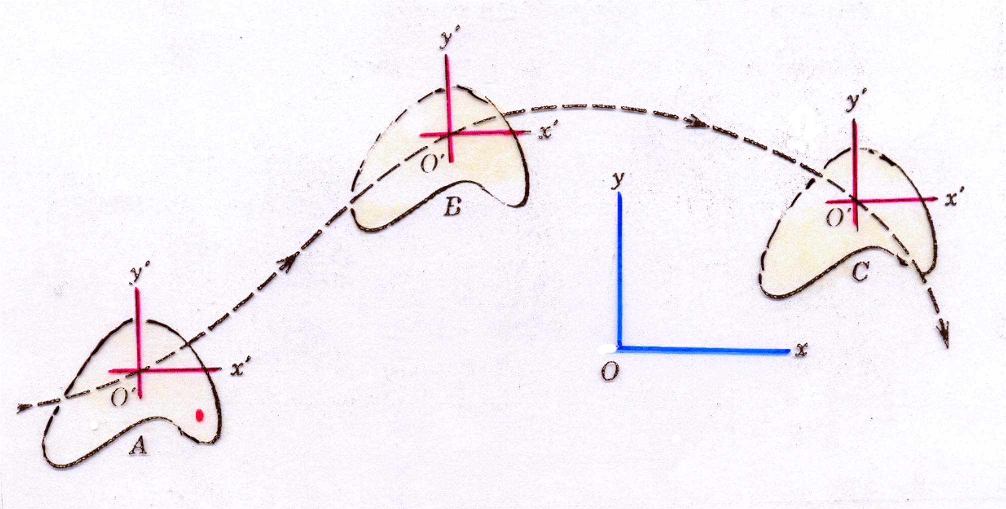
- **Οι νόμοι του Νεύτωνα ή εξισώσεις κίνησης:**

➤ **1ος νόμος του Νεύτωνα:** αν η συνολική δύναμη που εξασκείται πάνω σ' ένα σώμα είναι μηδέν, τότε η κινητική του κατάσταση διατηρείται σταθερή. (**αδρανειακά συστήματα αναφοράς**)

Εννοια της κίνησης: Ενα σώμα κινείται όταν αλλάζει η θέση του ως προς κάποιο άλλο σώμα, το οποίο θεωρούμε ακίνητο **(σημείο αναφοράς)**

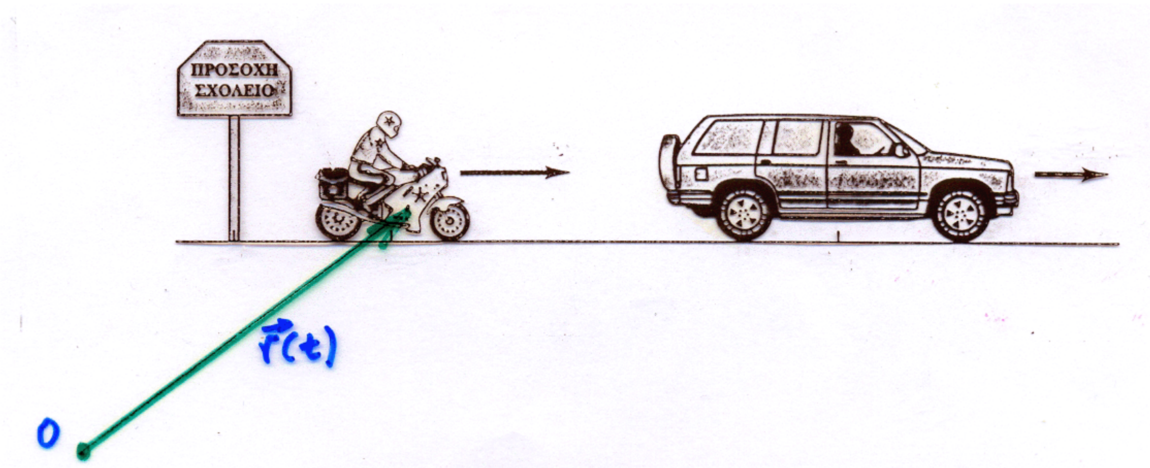
Χαρακτηριστικά κίνησης: προσδιορίζουν την κινητική κατάσταση του σώματος

Τροχιά κινητού: είναι οι διαδοχικές θέσεις που καταλαμβάνει το κινητό κατά την κίνησή του, δηλ. πρόκειται για καμπύλη (ή δέσμες καμπυλών) στον χώρο.

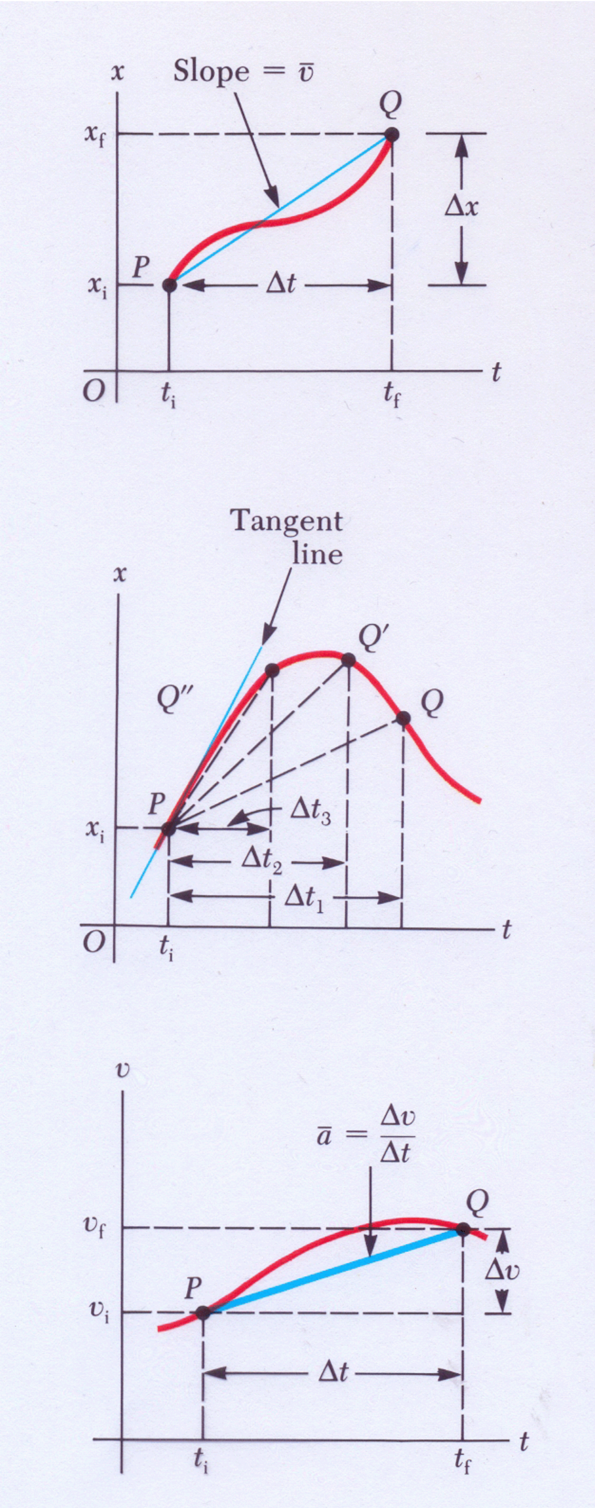


Το διάνυσμα θέσης (του κινητού):

προσδιορίζει ανά πάσα στιγμή τη θέση του σώματος ως προς κάποιο δεδομένο σημείο αναφοράς.



$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \equiv (x, y, z)$$



ταχύτης:

$$\vec{v} \equiv \lim \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\bigg|_{\Delta t \to 0}$$

$$= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\equiv (v_x, v_y, v_z)$$

όπου

$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$,

και

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Επιτάχυνση:

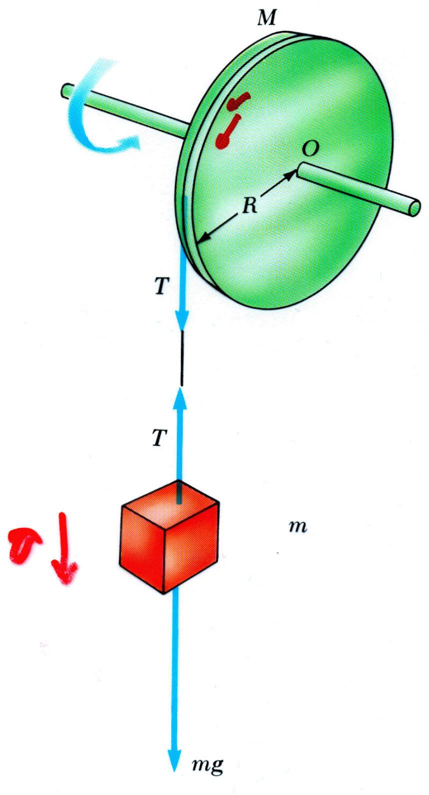
$$\vec{a} \equiv \lim \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\bigg|_{\Delta t \to 0}$$

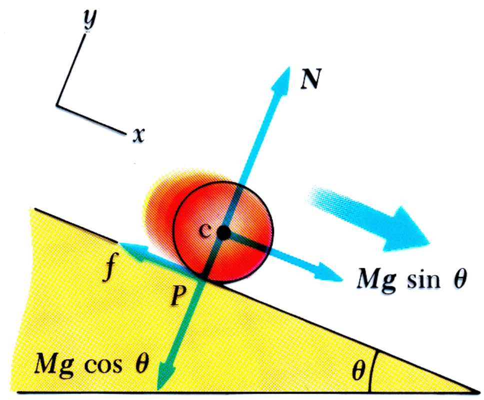
$$= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \equiv (a_x, a_y, a_z)$$

όπου $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, $a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2}$.

❃ **Είδη κίνησης**: μεταφορική, περιστροφική, κύλιση, κλπ. (εξαρτώνται από την εφαρμοζόμενη δύναμη και από τους συνδέσμους)





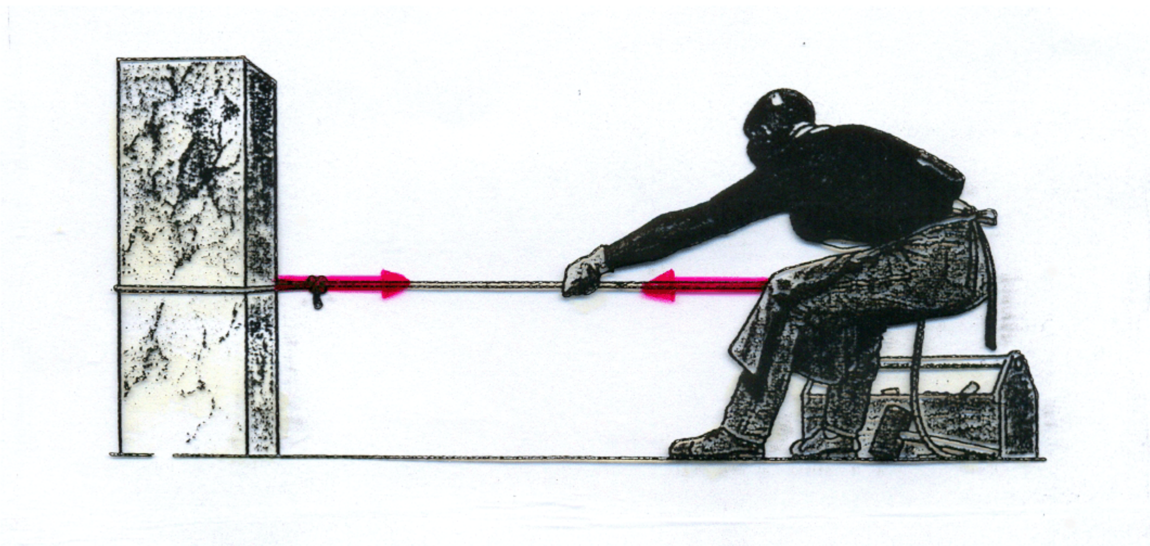
❃ **Η έννοια της δύναμης:** είναι το αίτιο που προκαλεί (α) την μεταβολή της κινητικής καταστάσεως ενός σώματος, (β) την παραμόρφωση του σχήματος ενός σώματος, ... (μονάδες μέτρησης, 1 Newton, στο σύστημα MKSA)

➤ **2ος νόμος του Νεύτωνα:** αν η συνολική δύναμη που εξασκείται πάνω σ' ένα σώμα είναι διάφορη του μηδενός, τότε προσδίδεται στο σώμα επιτάχυνση η οποία είναι ανάλογος της δρώσας δύναμης.

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

(**Μάζα** είναι το ποσόν της ύλης που περιέχεται μέσα σ' ένα σώμα—**από το βιβλίο Φυσικής της Ε' Δημοτικού.** Ή εκφράζει ποσοτικά το μέτρο της αδράνειας ενός σώματος)
(**Αδράνεια** της ύλης είναι η ιδιότης των σωμάτων να ανθίστανται στην μεταβολή της κινητικής τους κατάστασης)

▶ **<u>3ος νόμος του Νεύτωνα</u>:** αν ένα σώμα Α εξασκεί μια δύναμη σε σώμα Β, τότε και το σώμα Β εξασκεί ίση και αντίθετη δύναμη πάνω στο σώμα Α (**αρχή δράσης-αντίδρασης**)



Τί είναι ύλη;

<u>Μηχανοκρατία</u>: η ύλη είναι μια αδρανής πραγματικότης, η οποία στερείται ιδίας δύναμης και παρουσιάζεται είτε υπό μορφήν "ατόμων" είτε υπό μορφήν "εκτατών σωμάτων", ...
(εισηγητές των απόψεων αυτών είναι οι ατομικοί φιλόσοφοι Λεύκιππος και Δημόκριτος)

Υλομορφοκρατία: σε κάθε αισθητό αναγνωρίζεται μιά μικτή φύση, το “υλικό” στοιχείο και το “νοητό” στοιχείο. Το μεν νοητό υπάρχει καθ’εαυτό, το δε υλικό στερείται πραγματικότητας και είναι ακαθόριστο. Η ύλη είναι “σταθερή” και “ανεπηρέαστη” στις μεταβολές, ... **(προπομποί των αντιλήψεων αυτών υπήρξαν οι Πλάτων και Αριστοτέλης).**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΝΟΜΩΝ ΝΕΥΤΩΝΑ

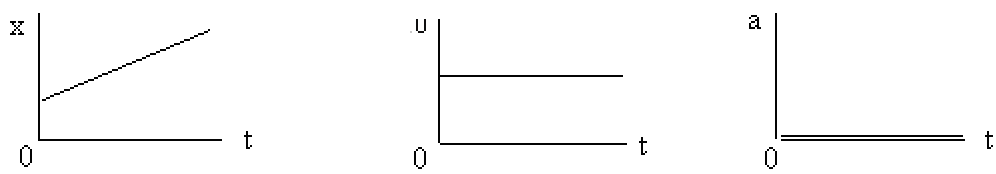
Α. ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

1) *Περίπτωση μηδενικής εξωτερικής δύναμη, $\vec{F}$ = 0.*

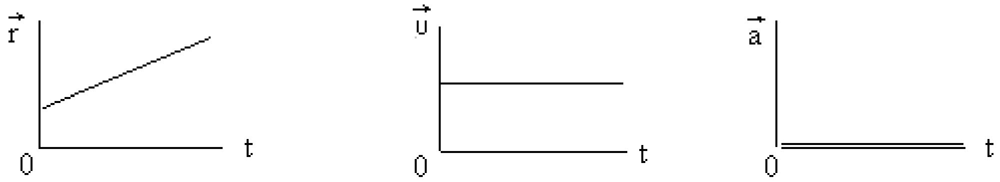
Έστω ότι σώμα μάζας m δεν δέχεται καμμία εξωτερική δύναμη. Να προσδιοριστεί η κίνηση του σώματος, δηλ. όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά που προσδιορίζουν πλήρως την κίνηση του σώματος.

Αναλυτικοί υπολογισμοί: Εφαρμόζομε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα: $\vec{F} = m\,\vec{a}$, έπεται: $\vec{a}=0$.

α) Στη μία διάσταση (1D), $a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, άρα $\frac{d\upsilon}{dt} = 0$, $\int d\upsilon = 0 \;\Rightarrow$ υ=c. Η σταθερά ολοκλήρωσης c υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες: Έστω ότι για t=0, $\upsilon(t=0)=\upsilon_o$, συνεπώς $\upsilon_o=c$, άρα $\upsilon=\upsilon_o$. Ακόμη, επειδή $\upsilon = \frac{dx}{dt}$, η προηγούμενη σχέση γράφεται: $\frac{dx}{dt} = \upsilon_o$, ή $dx=\upsilon_o dt$, ή $\int dx = \int \upsilon_o dt$, άρα $x=\upsilon_o t+c$. Υπολογισμός της σταθεράς c: Από τις αρχικές συνθήκες, έστω ότι για t=0, $x=x_o$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται $x=x_o+\upsilon_o t$. Βρήκαμε λοιπόν ότι όταν εξασκείται **μηδενικ**ή εξωτερική δύναμη σ’ ένα σώμα, (στη περίπτωση 1D) η κίνηση του σώματος περιγράφεται από τις σχέσεις: $x=x_o+\upsilon_o t$, $\upsilon=\upsilon_o$, a=0 και η τροχιά του σώματος είναι ευθεία γραμμή. (Serway’s transparencies, Fig. 3.9)



β) Στις δύο ή τρεις διαστάσεις έχομε παρομοίως: $\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, άρα $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=0$, $\int d\vec{\upsilon}=0 \Rightarrow \vec{\upsilon}=c$. Από τις αρχικές συνθήκες, έστω ότι δίδεται για t=0, $\vec{\upsilon}(0)=\vec{\upsilon}_o$, συνεπώς $c=\vec{\upsilon}_o$, ή $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_o$. Επαναλαμβάνοντας τα ίδια βήματα, λαμβάνουμε $\vec{r}=\vec{r}_o+\vec{\upsilon}_o t$. Συνεπώς στις 2D ή 3D, η κίνηση του σώματος περιγράφεται από τις σχέσεις: $\vec{r}=\vec{r}_o+\vec{\upsilon}_o t$, $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_o$, και $\vec{a}=0$. Η τροχιά του είναι ευθεία γραμμή.

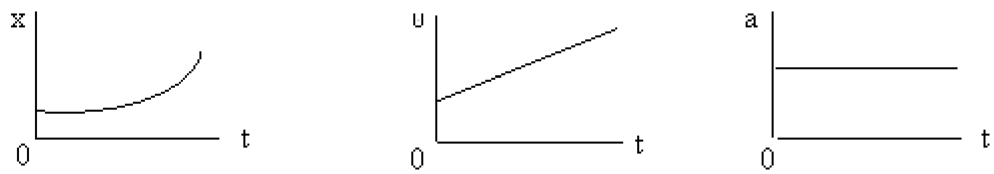


2) *Περίπτωση σταθερής εξωτερικής δύναμης, $\vec{F}\neq 0$.*

Έστω ότι ένα σώμα μάζας m δέχεται σταθερή εξωτερική δύναμη, $\vec{F}$. Να προσδιοριστεί η κίνηση του σώματος, δηλ. όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά που προσδιορίζουν πλήρως την κίνηση του σώματος.

Αναλυτικοί υπολογισμοί: Εφαρμόζομε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα: $\vec{F}=m\,\vec{a}$, άρα $\vec{a}=\vec{F}/m$=σταθ.

α) Στη μία διάσταση (1D), a=F/m. Ομως $a=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$, άρα $\frac{d\upsilon}{dt}=a$, $\int d\upsilon=\int a dt$ ⇒ υ=at+c.
Υπολογισμός της σταθεράς c: Από τις αρχικές συνθήκες, έστω ότι δίδεται για t=0, $\upsilon(t=0)=\upsilon_o$, συνεπώς $\upsilon_o=c$, άρα $\upsilon=\upsilon_o+at$. Στη συνέχεια, επειδή $\upsilon=\frac{dx}{dt}$, η προηγούμενη σχέση γράφεται:
$\frac{dx}{dt}=\upsilon_o+at$, άρα $dx=(\upsilon_o+at)dt$, ή $\int dx=\int(\upsilon_o+at)dt$, ⇒ $x=\upsilon_o t+½at^2+c$, όπου a=F/m.
Υπολογισμός της σταθεράς c: Από αρχικές συνθήκες, έστω ότι για t=o, $x=x_o$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται $x=x_o+\upsilon_o t+½at^2$. Βρήκαμε λοιπόν ότι όταν εξασκείται μη-μηδενική εξωτερική δύναμη σ' ένα σώμα, (στη περίπτωση 1D) η κίνηση του σώματος περιγράφεται από τις σχέσεις: $x=x_o+\upsilon_o t+½at^2$, $\upsilon=\upsilon_o+at$, και a=F/m. Η τροχιά είναι καμπυλόγραμμη.



β) Στις δύο ή τρεις διαστάσεις (2D ή 3D), $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ και επαναλαμβάνοντας τα ίδια βήματα λαμβάνουμε: $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\upsilon}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_o + \vec{a}t$, όπου $\vec{a}=\vec{F}/m$. Αναλύομε τα διανύσματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \equiv (x,y,z)$ $\qquad$ $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k} \equiv (\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)$

$\vec{r}_o = x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k} \equiv (x_o,y_o,z_o)$ $\qquad$ $\vec{\upsilon}_o = \upsilon_{ox}\vec{i} + \upsilon_{oy}\vec{j} + \upsilon_{oz}\vec{k} \equiv (\upsilon_{ox},\upsilon_{oy},\upsilon_{oz})$,

οπότε οι παραπάνω σχέσεις γράφονται (παραμετρική εξίσωση της τροχιάς):

$x=x_o+\upsilon_{ox}t+½a_xt^2$ *και* $\upsilon_x=\upsilon_{ox}+a_xt$, *όπου* $a_x=F_x/m$,
$y=y_o+\upsilon_{oy}t+½a_yt^2$ *και* $\upsilon_y=\upsilon_{oy}+a_yt$, *όπου* $a_y=F_y/m$,
$z=z_o+\upsilon_{oz}t+½a_zt^2$ *και* $\upsilon_z=\upsilon_{oz}+a_zt$, *όπου* $a_z=F_z/m$.

Η τροχιά είναι καμπυλόγραμμη (ή ευθεία) γραμμή.

3) *Περίπτωση ελεύθερης πτώσης σώματος*

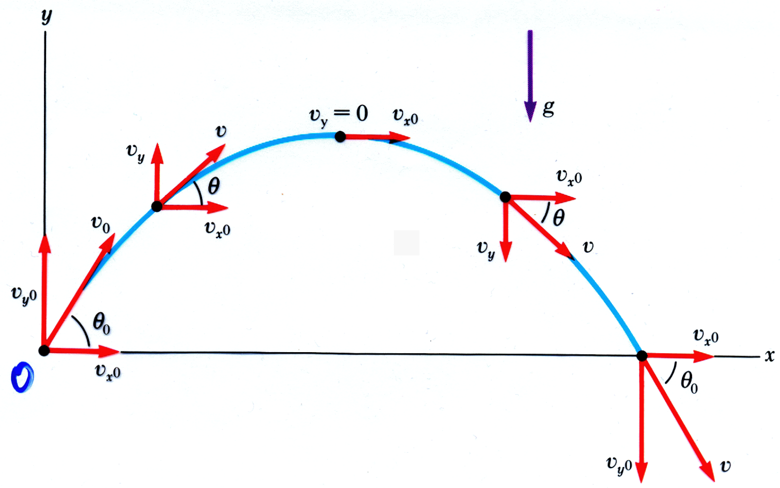
Η κινούσα δύναμη είναι το βάρος του σώματος: $\vec{B} = m\vec{g} = mg(-\vec{k})$, **όπου** $\vec{k}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα z και $\vec{g}$ η επιτάχυνση της βαρύτητος. Στην επιφάνεια της Γης: g = 9.81 m/sec^2 ή 32 ft/sec^2.

Αναλυτικοί υπολογισμοί: Δίδεται ότι: $\vec{B} = -mg\vec{k}$, άρα $a_x=B_x/m=0$, $a_y=B_y/m=0$, και $a_z=B_z/m=-g$. Έστω ότι $\vec{\upsilon}_o = 0$ και $\vec{r}_o = H\vec{k}$ =(0,0,H), δηλ. το σώμα αφήνεται από ένα αρχικό ύψος H με μηδενική αρχική ταχύτητα, οπότε εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις για $\vec{F}$=const λαμβάνομε,

$a_x=0$,	$a_y=0$,	$a_z=-g$,
$\upsilon_x=0$,	$\upsilon_y=0$,	$\upsilon_z=-gt$,
$x=0$,	$y=0$,	$z=H-½gt^2$,

4) *Περίπτωση πλάγιας βολής σώματος*
με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o = \upsilon_{ox}\vec{i} + \upsilon_{oy}\vec{j} + \upsilon_{oz}\vec{k} \equiv (\upsilon_{ox},\upsilon_{oy},0)$.

Η ασκούμενη δύναμη είναι το βάρος: $\vec{B} = m\vec{g} = mg(-\vec{j})$
(ΠΡΟΣΟΧΗ: το σύστημα συντεταγμένων είναι στο επίπεδο x-y)

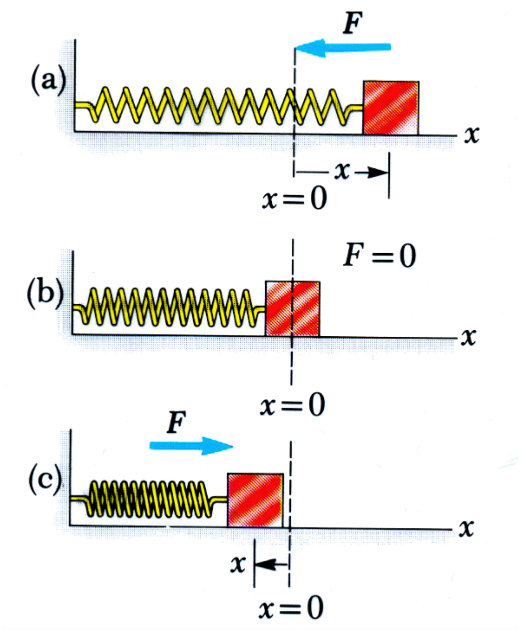


Αναλυτικοί υπολογισμοί: Δίδεται ότι: $\vec{B} = -\ mg\ \vec{j}$, άρα $a_x=B_x/m=0$, $a_y=B_y/m=-g$, $a_z=B_z/m=0$. Εστω ότι $\vec{v}_o = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j} = (υ_{ox},υ_{oy},0) = (υ_o\cosθ_o, υ_o\sinθ_o, 0)$ και $\vec{r}_o = (0,0,0)$, οπότε εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις για $\vec{F}$=const έχομε

$x=υ_{ox}t$,	$υ_x=υ_{ox}=υ_o\cosθ_o$	$a_x=0$,
$y=υ_{oy}t - ½\, g\, t^2$,	$υ_y=υ_{ox} - gt=υ_o\sinθ_o - gt$	$a_y=-g$,
$z=0$,	$υ_z=0$,	$a_z=0$.

Απαλείφοντας το t μεταξύ των σχέσεων x, y, παίρνομε: $y = \tan\theta_o x - \dfrac{g}{2υ_o^2 \cos^2\theta_o} x^2$, η οποία παριστάνει την εξίσωση της παραβολής στο επίπεδο-xy.

5) ***Περίπτωση απλής αρμονικής κίνησης.***



Έστω ότι η ασκούμενη εξωτερική δύναμη επί του σώματος είναι: $\vec{F} = -k\vec{r}$ (στη μία διάσταση είναι F=–kx). Να προσδιοριστεί η κίνηση του σώματος.

<u>Αναλυτικοί υπολογισμοί</u> (στη 1D): Δίδεται ότι $F=-kx$, άρα $a\equiv a_x=F_x/m=-k/m\ x \neq$ const. Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα: $F=ma$, λαμβάνομε $-kx=ma$. Όμως $a=d^2x/dt^2$, άρα

$$d^2x/dt^2 = -k/m\ x \quad (1).$$

Η εξίσωση αυτή είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως.

<u>Επίλυση της (1)</u>: Πολλαπλασιάζομε και τα δύο μέλη της (1) επί x' $\Rightarrow$ $x'x''=-k/m\ xx'$ ή $\frac{d}{dt}\frac{(x')^2}{2}=-\frac{k}{m}\frac{d}{dt}\frac{x^2}{2}$ ή $(x')^2=-\frac{k}{m}x^2+c$, όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης.

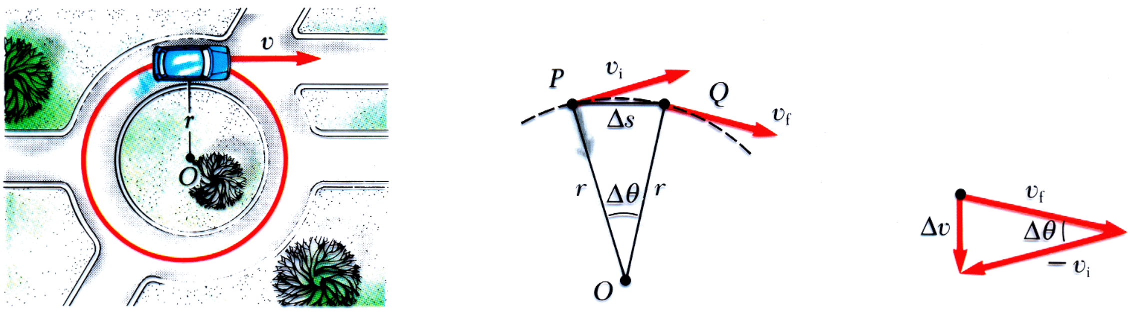
Λύνομε ως προς x’: $x'=\pm\sqrt{c-\frac{k}{m}x^2}$ ή $x'=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{cm}{k}-x^2}$. Ορίζουμε τις σταθερές: $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ και $\alpha^2=\frac{cm}{k}$ οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται: $x'=\pm\omega\sqrt{\alpha^2-x^2}$ ή $\frac{dx}{dt}=\pm\omega\sqrt{\alpha^2-x^2}$. Η σχέση αυτή ολοκληρώνεται αμέσως, αφού διαχωρίσουμε πρώτα τις μεταβλητές: $\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\pm\omega dt$ ή $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\pm\int\omega dt$, απ’ όπου παίρνομε $\sin^{-1}(\frac{x}{\alpha})=\pm\omega t+\delta$, όπου δ η νέα σταθερά ολοκλήρωσης. Η συνάρτηση αυτή αντιστρέφεται:

$$x=\alpha\sin(\pm\omega t+\varphi)=\pm\alpha\sin(\omega t\pm\varphi) \text{ ή γενικά } x=x_o\sin(\omega t+\varphi),$$

όπου $x_o=\pm\alpha$ και $\varphi=\pm\delta$ είναι δύο αυθαίρετες σταθερές (οι οποίες προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες) και $\omega=\sqrt{k/m}$ είναι η συχνότητα ταλάντωσης.

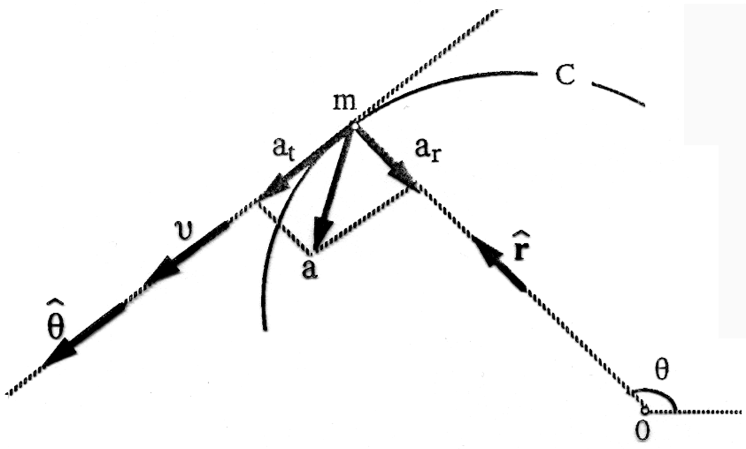
6) <u>*Περίπτωση Κυκλικής κίνησης.*</u>

Έστω ότι η ασκούμενη εξωτερική δύναμη επί του σώματος είναι κάθετη προς την διεύθυνση κίνησής του *(όπως η δύναμη Lorentz, $\vec{F}=q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$, στη περίπτωση της κίνησης φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο).* ***Να προσδιοριστεί η κίνηση του σώματος.***



(a) (b) (c)

Η εφαπτομενική και η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης στη καμπυλόγραμμη κίνηση:



ΟΡΙΣΜΟΙ:

0 : **καλείται κέντρο καμπυλότητος**

r : **καλείται ακτίνα καμπυλότητος**

$\hat{\theta}$ ή $\hat{\mathbf{u}}_t$ **: είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την εφαπτομενική διεύθυνση**

$\hat{\mathbf{r}}$ ή $\hat{\mathbf{u}}_r$ **: είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης (από το 0 προς το σώμα)**

ταχύτης: $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{\theta}$

επιτάχυνση: $\vec{\mathbf{a}} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\upsilon\hat{\theta}) = \dfrac{d\upsilon}{dt}\hat{\theta} + \upsilon\dfrac{d\hat{\theta}}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dt}\hat{\theta} + \upsilon(\dfrac{\upsilon}{r}\hat{\mathbf{r}}) \equiv \vec{\mathbf{a}}_t + \vec{\mathbf{a}}_r$

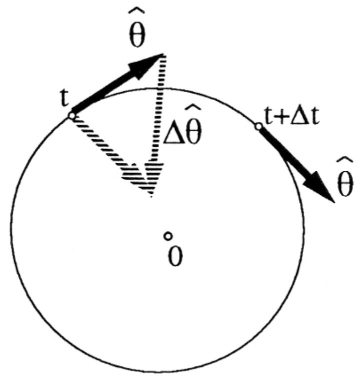
όπου

$\vec{\mathbf{a}}_t = \dfrac{d\upsilon}{dt}\hat{\theta}$: **είναι η επιτρόχιος συνιστώσα της επιτάχυνσης,**

$\vec{\mathbf{a}}_r = \dfrac{\upsilon^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$: **η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης.**

Στην ΕΙΣΑΓΩΓΗ αποδεικνύεται (βλέπε και επόμενο σχήμα) ότι:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\hat{\mathbf{r}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -\hat{\mathbf{r}}\omega$$



Οπότε, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

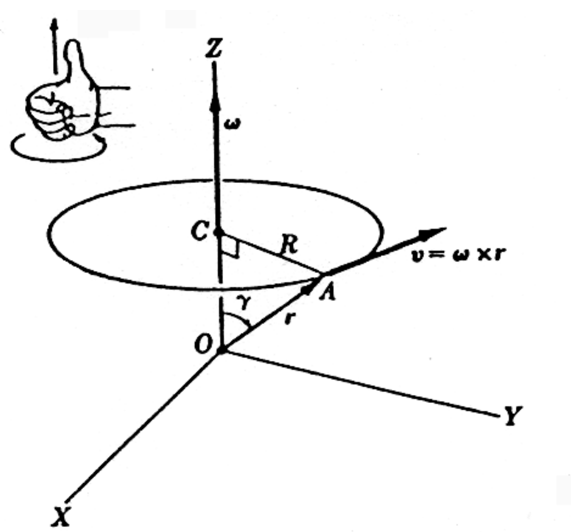
α) κατά την εφαπτομενική διεύθυνση: $F_t = m\, a_t$

β) κατά την ακτινική διεύθυνση: $F_r = m\, a_r$

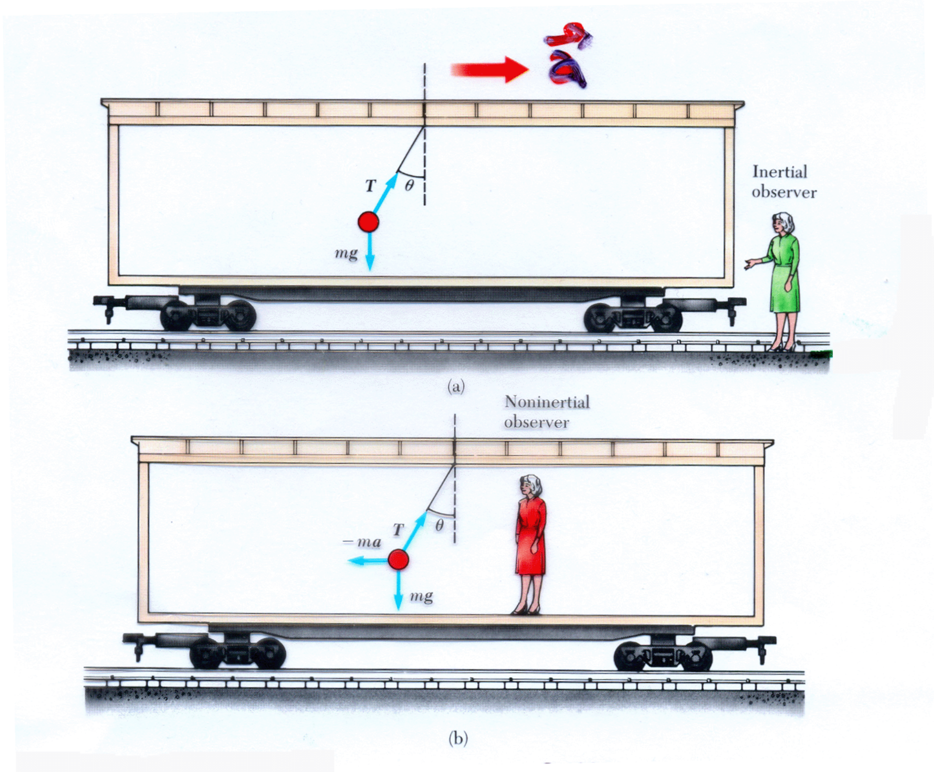
όπου $\mathbf{a_r} = \dfrac{\upsilon^2}{\mathbf{r}}$ **και** $\mathbf{a_t} = \dfrac{\mathbf{d\upsilon}}{\mathbf{dt}}$

Η ποσότης $\omega = \dfrac{\mathbf{d\theta}}{\mathbf{dt}}$ ***καλείται γωνιακή ταχύτης (μονάδες: rad/sec ή*** sec^{-1}***), ενώ η (γραμμική) ταχύτης (πάντα κατά την εφαπτομενική διεύθυνση)***

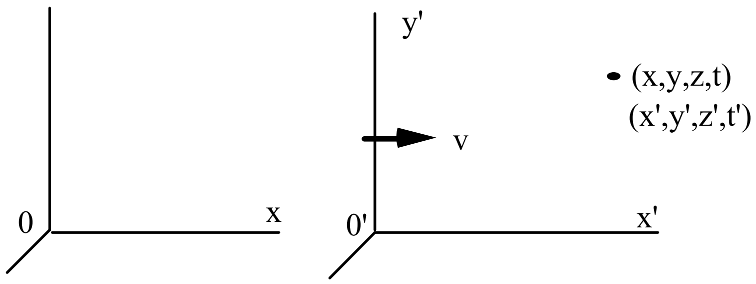
$$\upsilon = \omega r \qquad \text{ή} \qquad \vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}} = \omega \mathbf{r} \sin\gamma \ \hat{\mathbf{u}}_t$$



ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΑ ΚΑΙ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ



Ένα γεγονός έχει συντεταγμένες (x, y, z, t) και (x', y', z', t'), αντίστοιχα, στα δύο αδρανειακά συστήματα.



Α) Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου:

$$x = x' + v\,t'$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$

και παραγωγίζοντας έπονται οι σχέσεις των ταχυτήτων:

$$u_x = u'_x + v$$
$$u_y = u'_y$$
$$u_z = u'_z$$

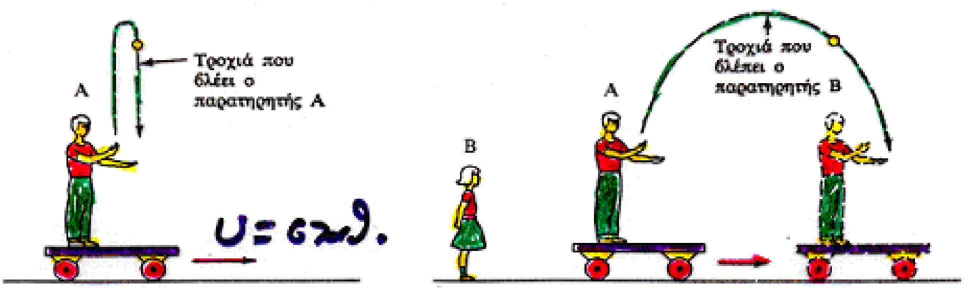
όπου $u_x = \dfrac{dx}{dt}, \quad u'_x = \dfrac{dx'}{dt'},$ **κλπ….**

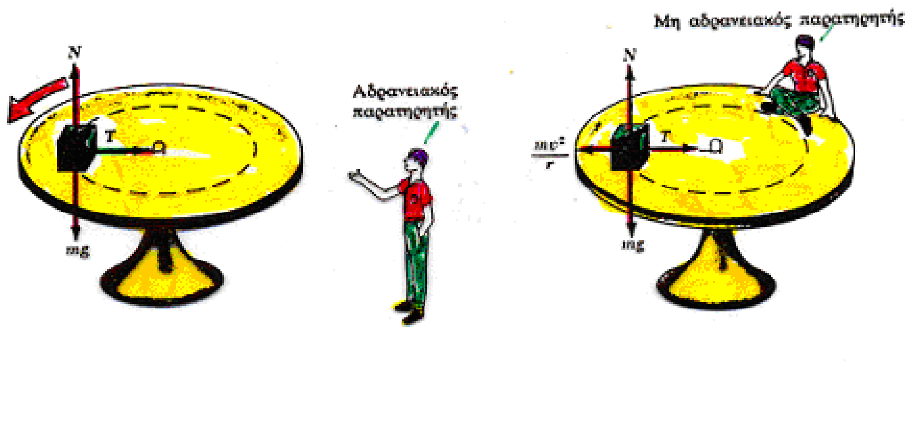
B) Οι μετασχηματισμοί του Lorentz:

$$x = \gamma\,(x' + v\,t')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right), \qquad \text{όπου } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ: Αδρανειακά και επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς

Αδρανειακά: είναι τα συστήματα αναφοράς στα οποία ισχύει ο 1ος νόμος του Νεύτωνα

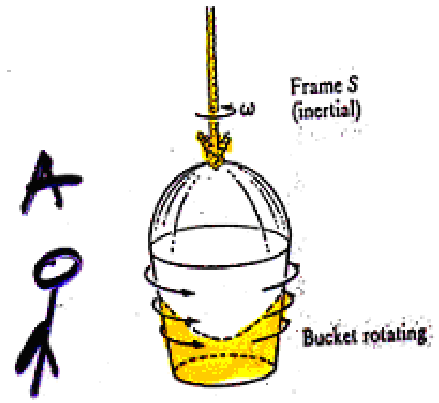


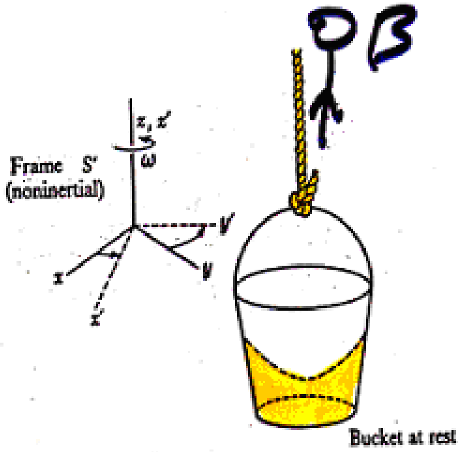


Για μη-αδρανειακό παρατηρητή:
(δύναμη αδρανείας του D' Alembert)

$$\boxed{\vec{F} = - m\vec{a}}$$

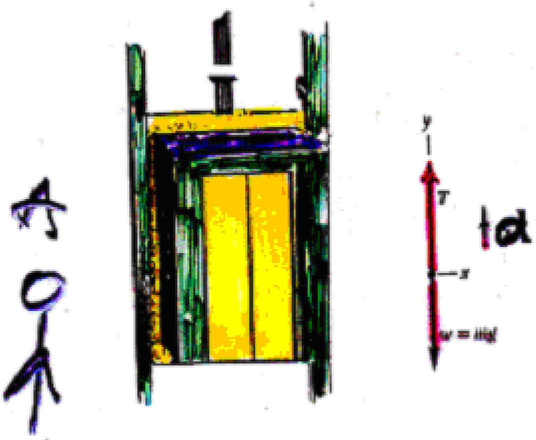
φαιν

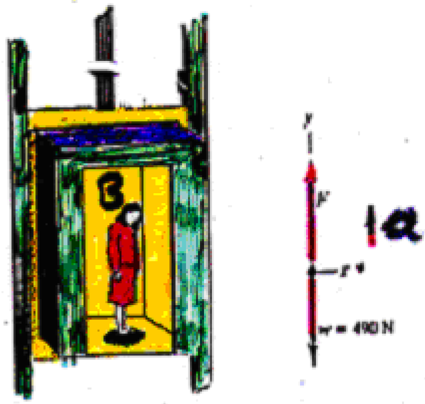




ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Βρείτε το σχήμα της ελεύθερης επιφάνειας του νερού μέσα στον περιστρεφόμενο δοχείο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Στον ανελκυστήρα του σχήματος, βρείτε τη τάση του νήματος.





Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Στη Κλασσική Φυσική, λέμε ότι ένα φυσικό σύστημα έχει μια **συμμετρία**, αν ένας αριθμός μετασχηματισμών (που σχετίζονται με τη συγκεκριμένη συμμετρία) εφαρμοζόμενος στο σύστημα, δεν επιφέρει καμμιά αλλαγή στο σύστημα (δηλ. οι νόμοι της φυσικής παραμένουν αναλλοίωτοι στο σύστημα).

Λέμε ότι η συγκεκριμένη συμμετρία αντιστοιχεί σε (ή σχετίζεται με) ένα συγκεκριμένο **διατηρούμενο φυσικό μέγεθος** του συστήματος, και κατ' επέκταση οι νόμοι διατήρησης στη κλασσική φυσική αντιστοιχούν ή σχετίζονται με συμμετρίες του συστήματος.

Για παράδειγμα, αν ένα σύστημα μετατοπίζεται στον 3-διάστατο χώρο, χωρίς να επέρχεται καμμιά αλλαγή στο σύστημα, τότε γνωρίζουμε ότι διατηρείται η ορμή του συστήματος (οι 3 συνιστώσες της). Υπό άλλη προσέγγιση, ο $1^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα υποστηρίζει το ίδιο συμπέρασμα. Άλλο παράδειγμα, αν ένα σύστημα είναι συμμετρικό ως προς το χρόνο, γνωρίζουμε ότι το αντίστοιχο φυσικό μέγεθος που διατηρείται είναι η ενέργεια. Θα δούμε στον Ηλεκτρισμό, υπό τη στενή έννοια, ότι αν έχουμε μια ομοιόμορφη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου, τότε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου διατηρείται σταθερή (δηλ. δημιουργείται ομογενές πεδίο).

Στην Κβαντομηχανική, απλά αλλάζει η ορολογία: Λέμε ότι οι μετασχηματισμοί που αφήνουν το σύστημα αμετάβλητο, ορίζουν μια ομάδα συμμετρίας (a symmetry group).

ΚΑΛΥΦΘΕΙΣΑ ΥΛΗ:
Κεφάλαια 1,2,3,4,5,6   R.A. Serway
Κεφάλαια 1,2,3,4,5   H.D. Young