ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ: 2006-2007
ΕΞΑΜΗΝΟ Α'

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΙΧ. ΒΕΛΓΑΚΗΣ

ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ:

(α) R. A. SERWAY, PHYSICS FOR SCEINTISTS & ENGINEERS, ΤΟΜΟΙ I & III.
(β) H.D. YOUNG, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ, ΤΟΜΟΣ Α'.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1) **Συστήματα μονάδων** και θεμελιώδεις μονάδες:

$$CGS = \begin{cases} cm \\ gr \\ sec \end{cases}, \qquad MKSA\ (or\ SI) = \begin{cases} m \\ Kgr \\ sec \\ Ampere \end{cases}$$

1α) Παράγωγοι μονάδες:

- π.χ. το μέγεθος ταχύτητα:

  μονάδα 1 cm/sec (στο CGS) και 1 m/sec (στο MKSA)

- π.χ. το μέγεθος επιτάχυνση:

  μονάδα 1 cm/sec^2 (στο CGS) και 1 m/sec^2 (στο MKSA)

- π.χ. το μέγεθος δύναμη:

  μονάδα 1 dyne (στο CGS) και 1 Newton (στο MKSA)

Σχέση της παραγώγου μονάδος με τις θεμελιώδεις μονάδες στο αντίστοιχο σύστημα μονάδων.

Από τη μαθηματική σχέση: F=mγ, έχομε:

$$1dyne = 1gr \cdot cm/sec^2 \text{ και } 1Nt = 1Kgr \cdot m/sec^2$$

(σχέση μεταξύ τους: $1Nt = 10^5 dynes$)

2) **Τρόπος επίλυσης των ασκήσεων:**

- αναφέρεται ο νόμος που πρόκειται να εφαρμοστεί,
- γράφεται η μαθηματική σχέση του νόμου,
- επεξηγούνται όλα τα μαθηματικά σύμβολα στη σχέσης
- και επιλύεται η προκύπτουσα σα μαθηματική σχέση

3) **Σχέση του εργαστηρίου Φυσικής** με το μάθημα της Φυσικής.

Υποχρεωτική ολοκλήρωση όλων των προβλεπομένων ασκήσεων από το εργαστήριο Φυσικής, δηλ.

- επιτέλεση του πειραματικού μέρους,
- συγγραφή και υποβολή της αντίστοιχης αναφοράς και
- έλεγχος της βαθμολογημένης αναφοράς μήπως έχει ζητηθεί να επαναληφθούν οι μετρήσεις ή η συγγραφή της αναφοράς

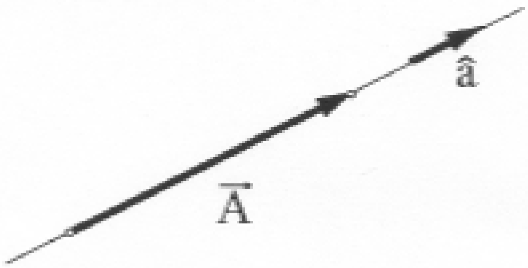
Ο μέσος όρος του βαθμού των αναφορών (που δεν απαιτείται να είναι πάνω από το 5) λαμβάνεται υπόψιν στη διαμόρφωση της τελικής βαθμολογίας του μαθήματος της Φυσικής

4) Διανυσματικός λογισμός (περιληπτικά)

<u>Διανύσματα</u>: είναι τα μεγέθη που για να ορισθούν (δηλ. να ορίσομε μια ποσότητα του συγκεκριμένου μεγέθους) χρειάζεται να δοθεί το μέτρον και η κατεύθυνση του μεγέθους (π.χ. η ταχύτης)

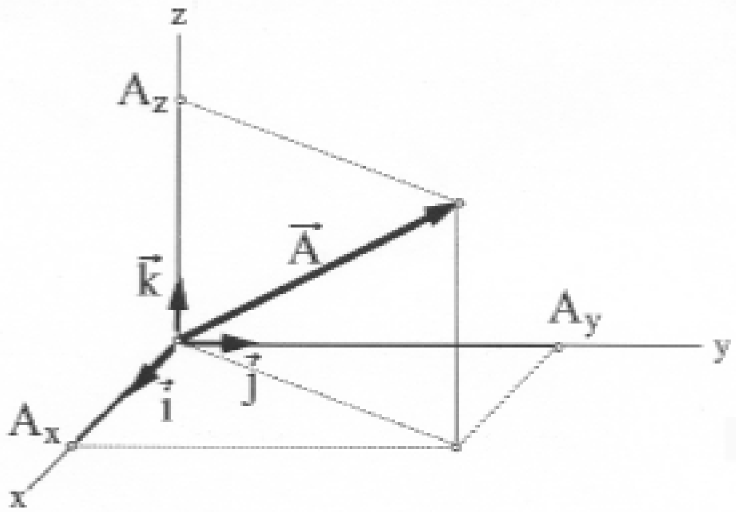
<u>Βαθμωτά μεγέθη</u>: για να ορισθούν τα μεγέθη αυτά αρκεί μόνο το μέτρον (π.χ. η θερμοκρασία)

<u>Συμβολισμός διανυσμάτων</u>: $\vec{A} = A\,\hat{a}$ ή $\vec{A} = |\vec{A}|\,\hat{a}$

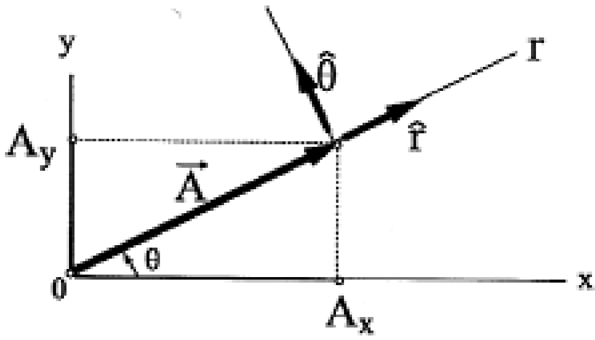


<u>Συνιστώσες ενός διανύσματος</u>:

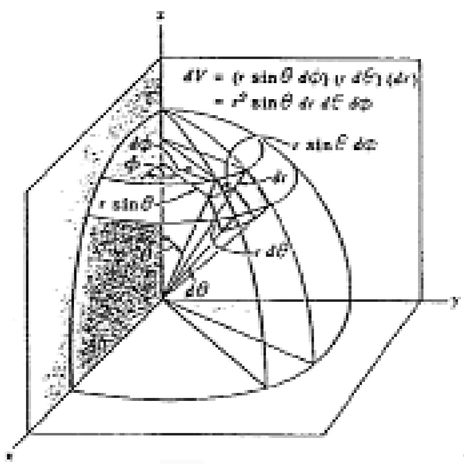
Καρτεσιανές συντεταγμένες:: (A_x, A_y, A_z) , (x,y,z)



Πολικές συντεταγμένες:: (A, θ) , (r, θ)



Σφαιρικές συντεταγμένες: (A, θ, φ) , (r, θ, φ)



<u>Πράξεις σε διανύσματα</u>:

1. ισότης διανυσμάτων: $\vec{A} = \vec{B}$

2. πρόσθεση διανυσμάτων: $\vec{A} + \vec{B}$

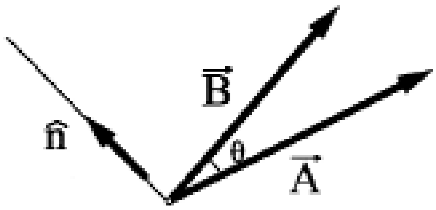
3. γινόμενο διανυσμάτων

   αριθμητικό (ή εσωτερικό): $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$= AB\cos\theta \quad \text{ή} \quad A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

διανυσματικό (ή εξωτερικό) γινόμενο: $\vec{A} \times \vec{B}$

$$= AB \sin\theta \, \hat{n} \quad ή \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



γινόμενο διανύσματος επί αριθμού: $\vec{A} \cdot \lambda$

$$= \lambda A \, \hat{a}$$

4. διαίρεση διανυσμάτων: $\dfrac{\vec{A}}{\vec{B}}$: απαγορεύεται

5. διαίρεση διανύσματος διά αριθμού: $\dfrac{\vec{A}}{\lambda}$

$$= \frac{A}{\lambda} \hat{a}$$

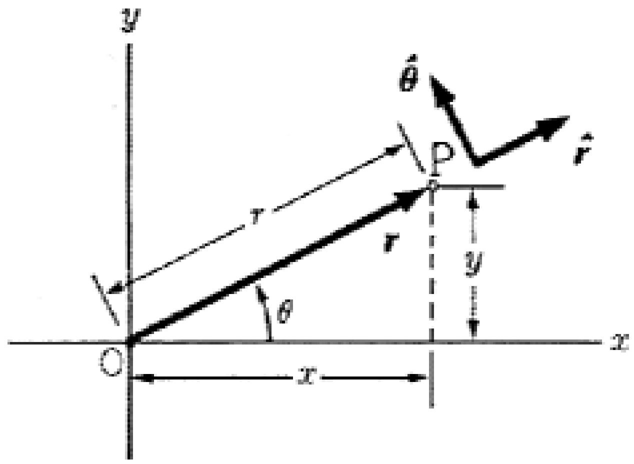
6. παραγώγιση διανύσματος: $\dfrac{d\vec{A}}{dx}$

$$= \frac{dA}{dx} \hat{a} + A \frac{d\hat{a}}{dx}$$

7. ολοκλήρωση διανύσματος: $\int \vec{A} \, dx$

Ταχύτης και επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες.

Έστω $\vec{\mathbf{r}} = \mathrm{r}\hat{\mathbf{r}}$ το διάνυσμα θέσης ενός σημείου P (τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\theta}$ κατευθύνονται κατά τη διεύθυνση που αυξάνουν τα μεγέθη r και θ, αντίστοιχα - βλέπε Σχήμα 1).



Σχήμα 1

---

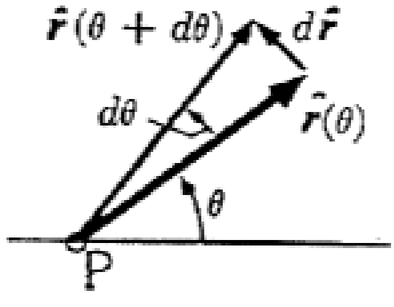
1) Η ταχύτης του σημείου P υπολογίζεται ως εξής:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathrm{r}\hat{\mathbf{r}}) = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + \mathrm{r}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \upsilon_r\,\hat{\mathbf{r}} + \mathrm{r}\omega\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (1)$$

όπου $\upsilon_r = dr/dt$ είναι η **ακτινική** ταχύτης (κατά μήκος του άξονα r) και $\omega = d\theta/dt$ είναι η γωνιακή ταχύτης του σημείου P. Ο τελευταίος όρος στην (1) αποδεικνύεται ως εξής:

Από το διανυσματικό τρίγωνο του Σχήματος 2 έχομε:

$d\hat{\mathbf{r}} = (|\,\hat{\mathrm{r}}\,|\,d\theta)\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$, συνεπώς: $\dfrac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$.



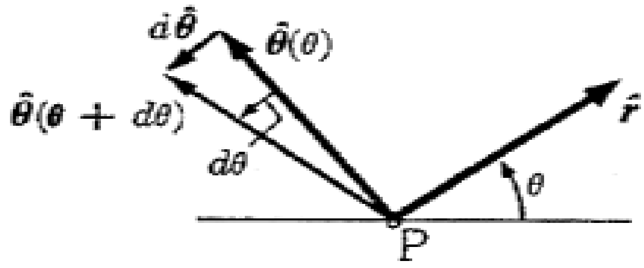
Σχήμα 2

2) Η επιτάχυνση του σημείου P υπολογίζεται ης εξής:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon_r \hat{r} + r\omega\hat{\theta}) = \frac{d\upsilon_r}{dt}\hat{r} + \upsilon_r \frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\omega\hat{\theta} + r\frac{d\omega}{dt}\hat{\theta} + r\omega\frac{d\hat{\theta}}{dt} \qquad (2)$$

όπου $\frac{d\upsilon_r}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \equiv a_r$ είναι η ακτινική επιτάχυνση (κατά μήκος του άξονα r).

Η τελευταία παράγωγος στη (2) υπολογίζεται ως εξής:



Σχήμα 3

Από το διανυσματικό τρίγωνο του Σχήματος 3 έχομε:

$d\hat{\theta} = (|\hat{\theta}|\, d\theta)\,(-\hat{r}) = -d\theta\,\hat{r}$, (εφόσον $|\hat{\theta}| = |\hat{r}| = 1$), συνεπώς:

$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r} = -\omega\hat{r}$. Αντικαθιστώντας στην (2) λαμβάνομε,

$$\vec{a} = a_r\hat{r} - r\omega^2\hat{r} + 2\upsilon_r\omega\hat{\theta} + r\alpha\hat{\theta} \qquad (3)$$

Ο τελευταίος όρος στη (3) καλείται **επιτρόχιος** επιτάχυνση, $\vec{a}_t = r\alpha\hat{\theta}$, όπου $\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ είναι η **γωνιακή** επιτάχυνση. Ο προτελευταίος όρος

$\vec{a}_C = 2\upsilon_r\omega\hat{\theta}$ καλείται επιτάχυνση **Coriollis**, και ο δεύτερος όρος

$\vec{a}_R = -r\omega^2\hat{r}$ καλείται **κεντρομόλος** επιτάχυνση ο οποίος κατευθύνεται πάντοτε ακτινικά προς τον άξονα (ή το σημείο) περιστροφής, ο δε **πρώτος** όρος $a_r\hat{r}$ παριστάνει την **ακτινική** επιτάχυνση που σχετίζεται με την αύξηση ή τη μείωση της ακτίνος περιστροφής r του σημείου P.

Αν το στερεό σώμα εκτελεί **περιστροφική** κίνηση ή το σημείο P εκτελεί **κυκλική** κίνηση, τότε εξ ορισμού $a_r = \upsilon_r = 0$, οπότε οι σχέσεις (1) και (3) παίρνουν την απλή μορφή (μην μπερδέψετε τα σύμβολα a_r και a_R),

$\vec{\upsilon} = r\omega\hat{\theta}$

$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} + r\alpha\hat{\theta}$

[που είναι οι σχέσεις (9-13) και (9-14)-(9-15), αντίστοιχα, του H.D. Young. Βλέπε επίσης Σχήμα 9-8 του H.D. Young]

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

- **Φυσική:** ενδιαφέρεται να ερμηνεύσει τα φυσικά φαινόμενα,συγκεκριμμένα αναζητεί τις προηγούμενες καταστάσεων ενός φαινομένου και προσπαθεί να ερμηνεύσει την ακολουθία αυτών των καταστάσεων (και η Μεταφυσική έχει το ίδιο αντικείμενο)

- **Χρόνος:** είναι μια αφηρημένη έννοια σε αντιδιαστολή με την "διάρκεια", που εκφράζει "βίωμα". Ο χρόνος είναι μιά απεριόριστη συνέχεια και ομογενής έννοια, συνεπώς είναι κάτι ποσοτικό.

- **Χώρος:** διαφέρει της έννοιας "έκταση". Ο χώρος είναι μια απεριόριστη συνέχεια που πλαισιώνει τα αντικείμενα, ενώ η έκταση είναι ένα τμήμα της συνέχειας αυτής (κατά Einstein, δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ χώρου και χρόνου).

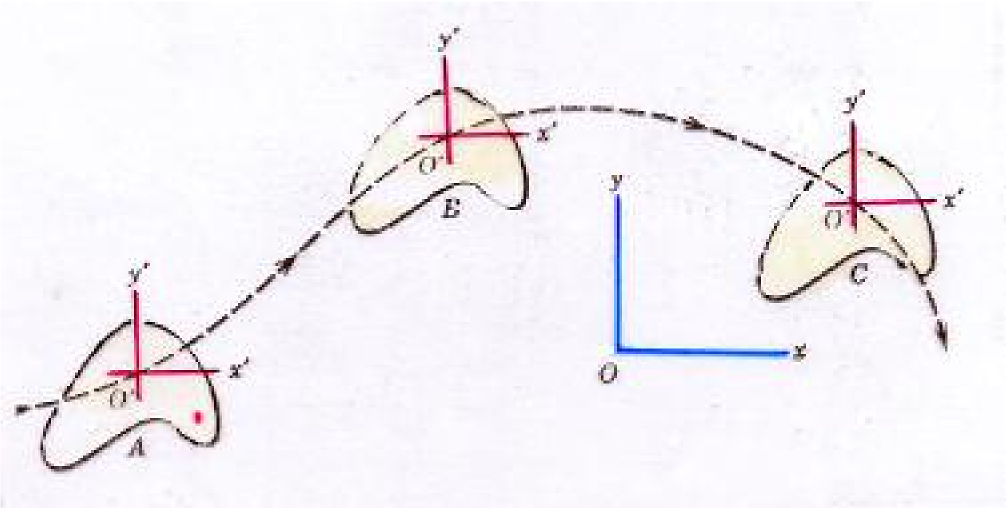
- **Οι νόμοι του Νεύτωνα ή εξισώσεις κίνησης:**

➤ **1ος νόμος του Νεύτωνα:** αν η συνολική δύναμη που εξασκείται πάνω σ' ένα σώμα είναι μηδέν, τότε η κινητική του κατάσταση διατηρείται σταθερή. (**αδρανειακά συστήματα αναφοράς**)

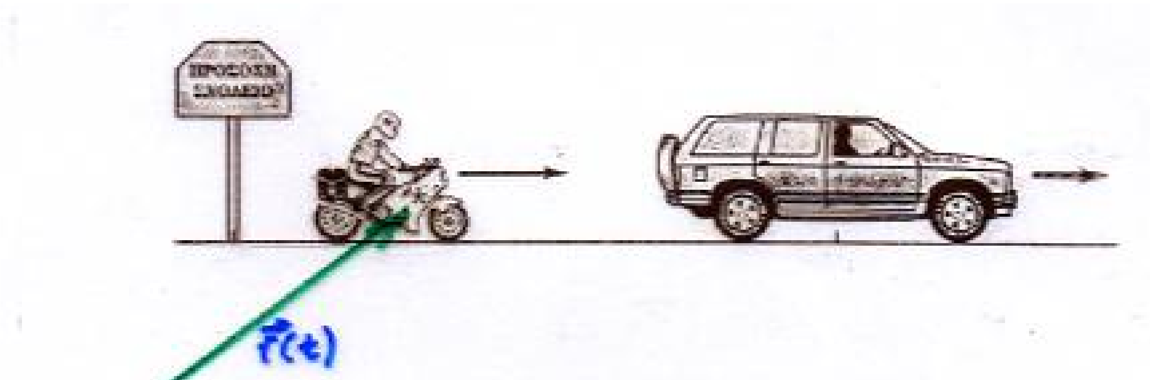
Εννοια της κίνησης: Ενα σώμα κινείται όταν αλλάζει η θέση του ως προς κάποιο άλλο σώμα, το οποίο θεωρούμε ακίνητο **(σημείο αναφοράς)**

Χαρακτηριστικά κίνησης: προσδιορίζουν την κινητική κατάσταση του σώματος

Τροχιά κινητού: είναι οι διαδοχικές θέσεις που καταλαμβάνει το κινητό κατά την κίνησή του, δηλ. πρόκειται για καμπύλη (ή δεσμίδες καμπυλών) στον χώρο.

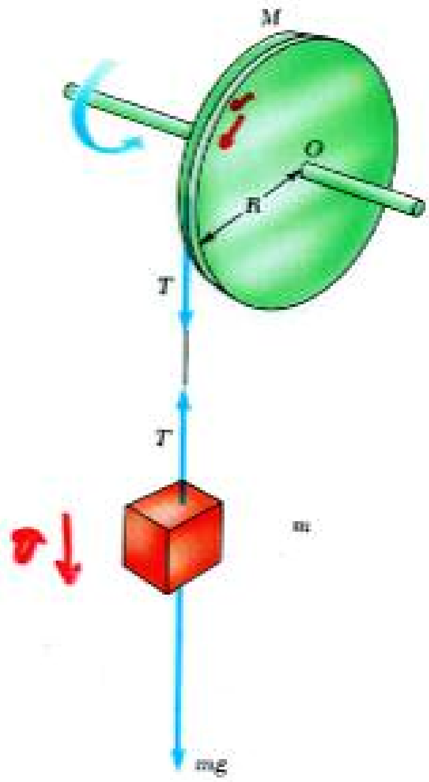


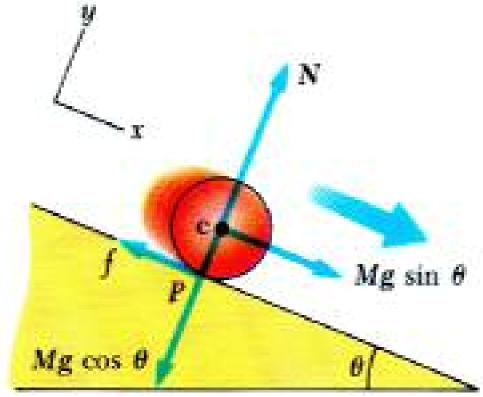
Διάνυσμα θέσης κινητού: προσδιορίζει ανά πάσα στιγμή τη θέση του σώματος ως προς κάποιο σημείο αναφοράς.



ταχύτης, (ορισμός, Serway's transparencies, Fig. 3.1, 3.2, 3.3)
επιτάχυνση, (ορισμός)
....

❃ **Είδη κίνησης**: μεταφορική, περιστροφική, κύλιση,...
(εξαρτώνται από την εφαρμοζόμενη δύναμη)





❃ **Η έννοια της δύναμης:** είναι το αίτιο που προκαλεί την μεταβολή της κινητικής καταστάσεως ενός σώματος, της παραμόρφωσης του σχήματος ενός σώματος, ... (μονάδες μέτρησης, 1 Newton, στο σύστημα MKSA)

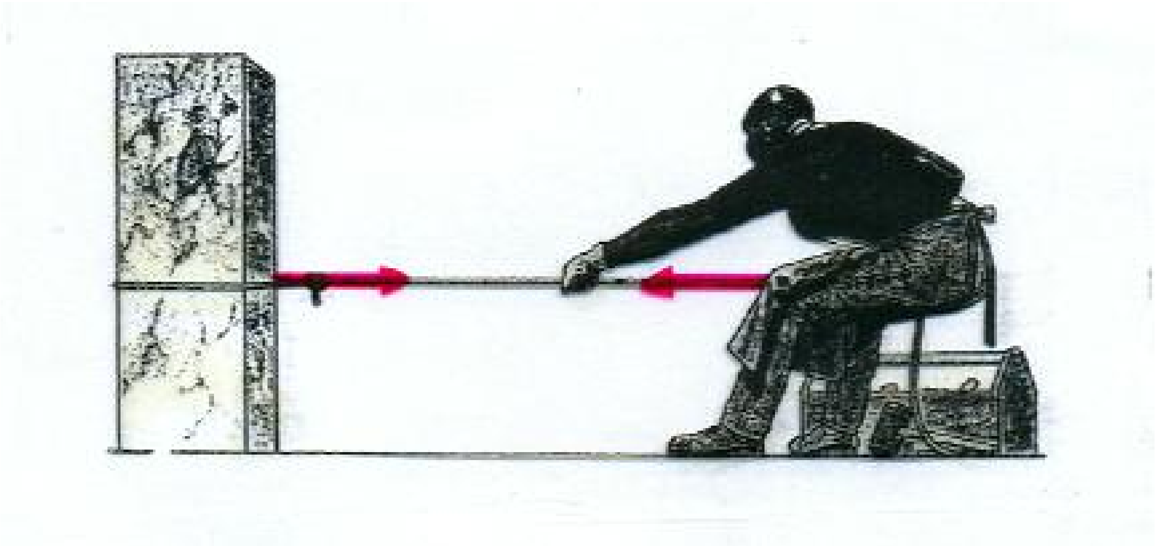
➤ **2ος νόμος του Νεύτωνα:** αν η συνολική δύναμη που εξασκείται πάνω σ' ένα σώμα είναι διάφορη του μηδενός, τότε προσδίδεται στο σώμα επιτάχυνση η οποία είναι ανάλογος της δρώσας δύναμης.

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

(**Μάζα** είναι το ποσοτικό μέτρο της αδράνειας ενός σώματος)
(**Αδράνεια** της ύλης είναι η ιδιότης των σωμάτων να διατηρούν την

κινητική τους κατάσταση ή να ανθίστανται στην μεταβολή της)

➤ **3ος νόμος του Νεύτωνα:** αν ένα σώμα Α εξασκεί μια δύναμη σε σώμα Β, τότε και το σώμα Β εξασκεί ίση και αντίθετη δύναμη πάνω στο σώμα Α (**δράση-αντίδραση**)



Τί είναι ύλη;

Μηχανοκρατία: η ύλη είναι μια αδρανής πραγματικότης, η οποία στερείται ιδίας δύναμης και παρουσιάζεται είτε υπό μορφήν “ατόμων” είτε υπό μορφήν “εκτατών σωμάτων”, ... (εισηγητές των απόψεων είναι οι ατομικοί φιλόσοφοι Λεύκιππος και Δημόκριτος)

Υλομορφοκρατία: σε κάθε αισθητό αναγνωρίζεται μιά μικτή φύση, το “υλικό” στοιχείο και το “νοητό” στοιχείο. Το μεν νοητό υπάρχει καθ’εαυτό, το δε υλικό στερείται πραγματικότητας και είναι ακαθόριστο. Η ύλη είναι “σταθερή” και “ανεπηρέαστη” στις μεταβολές, ... (προπομποί των αντιλήψεων αυτών υπήρξαν οι Πλάτων και Αριστοτέλης).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΝΟΜΩΝ ΝΕΥΤΩΝΑ

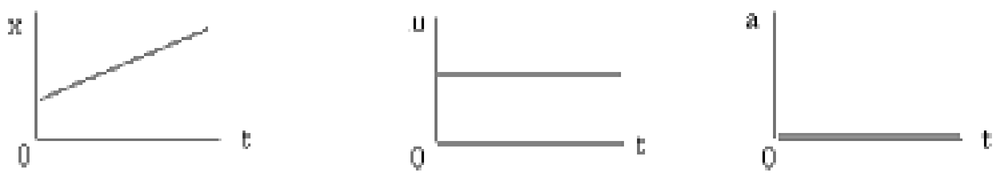
Α. ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

1) Περίπτωση μηδενικής εξωτερικής δύναμη, $\vec{F} = 0$.

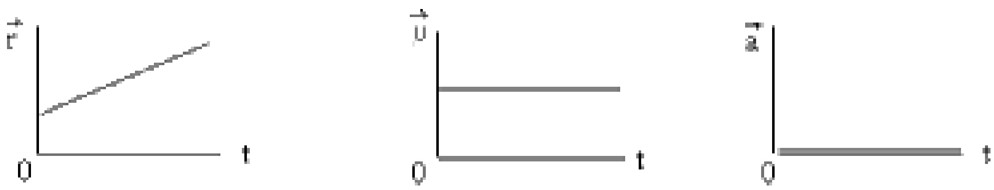
Έστω ότι σώμα μάζας m δεν δέχεται καμμία δύναμη. Να προσδιοριστεί η κίνηση του σώματος, δηλ. όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά που προσδιορίζουν πλήρως την κίνηση του σώματος.

Αναλυτικοί υπολογισμοί: Εφαρμόζομε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα: $\vec{F} = m\,\vec{a}$, έπεται: $\vec{a}=0$.

α) Στη μία διάσταση (1D), $a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, άρα $\frac{d\upsilon}{dt} = 0$, $\int d\upsilon = 0 \;\Rightarrow$ $\upsilon=c$. Η σταθερά ολοκλήρωσης c υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες: Έστω ότι για t=0, $\upsilon(t=0)=\upsilon_o$, συνεπώς $\upsilon_o=c$, άρα $\upsilon=\upsilon_o$. Ακόμη, επειδή $\upsilon = \frac{dx}{dt}$, η προηγούμενη σχέση γράφεται: $\frac{dx}{dt} = \upsilon_o$, ή $dx=\upsilon_o dt$, ή $\int dx = \int \upsilon_o dt$, άρα $x=\upsilon_o t+c$. Υπολογισμός της σταθεράς c: Από τις αρχικές συνθήκες, έστω ότι για t=0, $x=x_o$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται $x=x_o+\upsilon_o t$. Βρήκαμε λοιπόν ότι όταν εξασκείται **μηδενική** εξωτερική δύναμη σ' ένα σώμα, (στη περίπτωση 1D) η κίνηση του σώματος περιγράφεται από τις σχέσεις: $x=x_o+\upsilon_o t$, $\upsilon=\upsilon_o$, $a=0$ και η τροχιά του σώματος είναι ευθεία γραμμή. (Serway's transparencies, Fig. 3.9)



β) Στις δύο ή τρεις διαστάσεις έχομε παρομοίως: $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, άρα $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 0$, $\int d\vec{\upsilon} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\upsilon} = c$. Από τις αρχικές συνθήκες, έστω ότι δίδεται για t=0, $\vec{\upsilon}(0) = \vec{\upsilon}_o$, συνεπώς $c = \vec{\upsilon}_o$, ή $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_o$. Επαναλαμβάνοντας τα ίδια βήματα, λαμβάνουμε $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\upsilon}_o t$. Συνεπώς στις 2D ή 3D, η κίνηση του σώματος περιγράφεται από τις σχέσεις: $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\upsilon}_o t$, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_o$, και $\vec{a} = 0$. Η τροχιά του είναι ευθεία γραμμή.



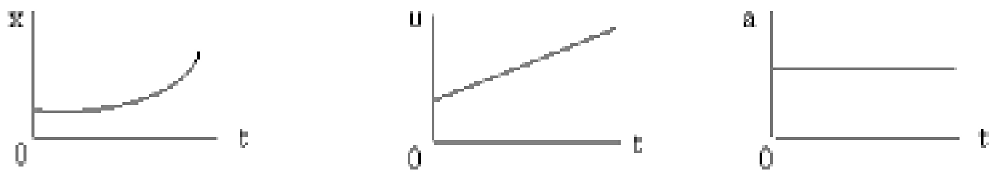
2) Σταθερή εξωτερική δύναμη, $\vec{F} \neq 0$.

Έστω ότι ένα σώμα μάζας m δέχεται σταθερή εξωτερική δύναμη, $\vec{F}$. Να προσδιοριστεί η κίνηση του σώματος, δηλ. όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά που προσδιορίζουν πλήρως την κίνηση του σώματος.

<u>Αναλυτικοί υπολογισμοί:</u> Εφαρμόζομε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα: $\vec{F} = m\,\vec{a}$, άρα $\vec{a}=\vec{F}/m$=σταθ.

α) Στη μία διάσταση (1D), a=F/m. Ομως $a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, άρα $\frac{d\upsilon}{dt} = a$, $\int d\upsilon = \int a dt \Rightarrow \upsilon = at + c$.
Υπολογισμός της σταθεράς c: Από τις αρχικές συνθήκες, έστω ότι δίδεται για t=0, $\upsilon(t=0)=\upsilon_o$, συνεπώς $\upsilon_o=c$, άρα $\upsilon=\upsilon_o+at$. Στη συνέχεια, επειδή $\upsilon = \frac{dx}{dt}$, η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$\frac{dx}{dt} = \upsilon_o + at$, άρα $dx=(\upsilon_o+at)dt$, ή $\int dx = \int (\upsilon_o + at)dt$, $\Rightarrow$ $x=\upsilon_o t+½at^2+c$, όπου a=F/m.
Υπολογισμός της σταθεράς c: Από αρχικές συνθήκες, έστω ότι για t=o, $x=x_o$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται $x=x_o+\upsilon_o t+½at^2$. Βρήκαμε λοιπόν ότι όταν εξασκείται μη-μηδενική εξωτερική δύναμη σ' ένα σώμα, (στη περίπτωση 1D) η κίνηση του σώματος περιγράφεται από τις σχέσεις: $x=x_o+\upsilon_o t+½at^2$, $\upsilon=\upsilon_o+at$, και a=F/m. Η τροχιά είναι καμπυλόγραμμη.



β) Στις δύο ή τρεις διαστάσεις (2D ή 3D), $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ και επαναλαμβάνοντας τα ίδια βήματα λαμβάνουμε: $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\upsilon}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_o + \vec{a}t$, όπου $\vec{a}=\vec{F}/m$. Αναλύομε τα διανύσματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \equiv (x,y,z) \qquad \vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k} \equiv (\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)$$

$$\vec{r}_o = x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k} \equiv (x_o,y_o,z_o) \qquad \vec{\upsilon}_o = \upsilon_{ox}\vec{i} + \upsilon_{oy}\vec{j} + \upsilon_{oz}\vec{k} \equiv (\upsilon_{ox},\upsilon_{oy},\upsilon_{oz}),$$

οπότε οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

$$x=x_o+\upsilon_{ox}t+½a_xt^2 \quad \text{και} \quad \upsilon_x=\upsilon_{ox}+a_xt, \quad \text{όπου} \quad a_x=F_x/m,$$
$$y=y_o+\upsilon_{oy}t+½a_yt^2 \quad \text{και} \quad \upsilon_y=\upsilon_{oy}+a_yt, \quad \text{όπου} \quad a_y=F_y/m,$$
$$z=z_o+\upsilon_{oz}t+½a_zt^2 \quad \text{και} \quad \upsilon_z=\upsilon_{oz}+a_zt, \quad \text{όπου} \quad a_z=F_z/m.$$

Η τροχιά είναι ευθεία γραμμή ή καμπυλόγραμμη (παραμετρική εξίσωση της τροχιάς).

3) Ελεύθερη πτώση σώματος υπό την επίδραση του βάρους του.

Η κινούσα δύναμη είναι το βάρος του σώματος: $\vec{B}$ **= m** $\vec{g}$ **= mg(-** $\vec{k}$ **),** **όπου** $\vec{k}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα z και $\vec{g}$ η επιτάχυνση της βαρύτητος. Στην επιφάνεια της Γης: g = 9.81 m/sec^2 ή 32 ft/sec^2.

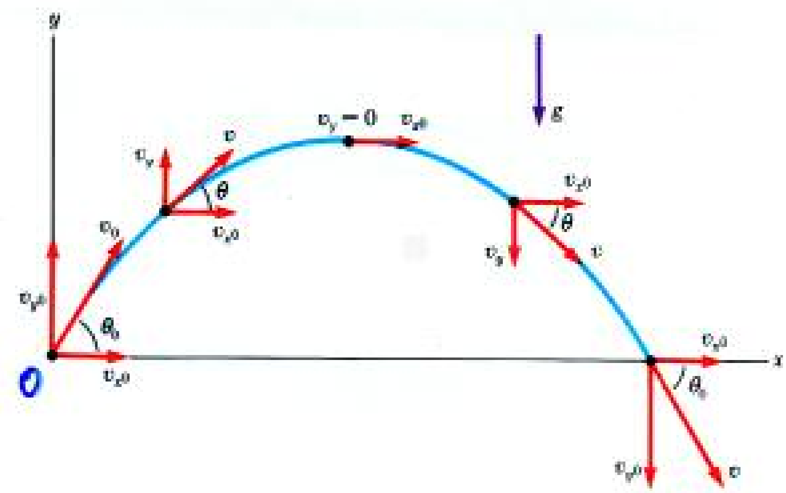
Αναλυτικοί υπολογισμοί: Δίδεται ότι: $\vec{B}$ = -mg$\vec{k}$, άρα $a_x=B_x/m=0$, $a_y=B_y/m=0$, και $a_z=B_z/m=-g$. Εστω ότι $\vec{\upsilon}_o = 0$ και $\vec{r}_o = H\vec{k}$ =(0,0,H), δηλ. το σώμα αφήνεται από ένα αρχικό ύψος H με μηδενική αρχική ταχύτητα,οπότε εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις για $\vec{F}$=const λαμβάνομε,

$x=0$,	$\upsilon_x=0$,	$a_x=0$,
$y=0$,	$\upsilon_y=0$,	$a_y=0$,
$z=H - ½gt^2$,	$\upsilon_z= - gt$,	$a_z= - g$.

4) Πλάγια βολή σώματος με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$, όπου

$$\vec{\upsilon}_o = \upsilon_{ox}\vec{i} + \upsilon_{oy}\vec{j} + \upsilon_{oz}\vec{k} \equiv (\upsilon_{ox},\upsilon_{oy},0).$$

Η ασκούμενη δύναμη είναι το βάρος: $\vec{B} = m\vec{g} = mg(-\vec{j})$
(ΠΡΟΣΟΧΗ: το σύστημα συντεταγμένων είναι x-y)



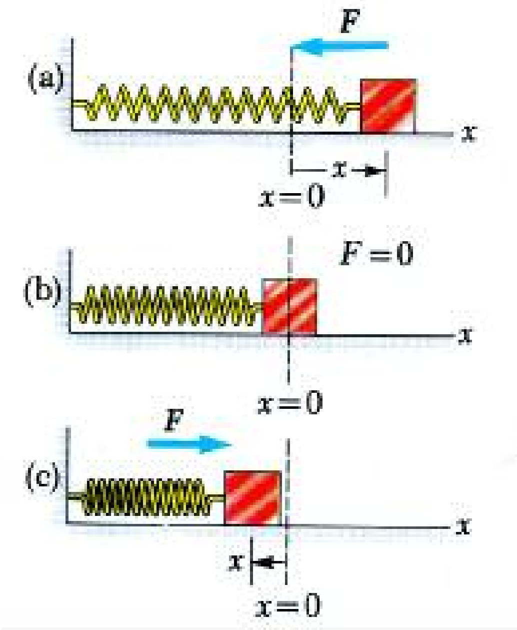
Αναλυτικοί υπολογισμοί: Δίδεται ότι: $\vec{B}$ = - mg $\vec{j}$, άρα $a_x=B_x/m=0$, $a_y=B_y/m=-g$, $a_z=B_z/m=0$. Εστω ότι $\vec{\upsilon}_o = \upsilon_{ox}\vec{i} + \upsilon_{oy}\vec{j}$ = (υ_{ox},υ_{oy},0) = ($\upsilon_o\cos\theta_o$,$\upsilon_o\sin\theta_o$,0) και $\vec{r}_o$ = (0,0,0), οπότε εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις για $\vec{F}$=const έχομε

$x=\upsilon_{ox}t$,	$\upsilon_x=\upsilon_{ox}=\upsilon_o\cos\theta_o$	$a_x=0$,
$y=\upsilon_{oy}t - ½ g t^2$,	$\upsilon_y=\upsilon_{ox} - gt=\upsilon_o\sin\theta_o - gt$	$a_y=-g$,
$z=0$,	$\upsilon_z=0$,	$a_z=0$.

Απαλείφοντας το t μεταξύ των σχέσεων x, y, παίρνομε: $y = \tan\theta_o x - \frac{g}{2\upsilon_o^2 \cos^2\theta_o} x^2$, η οποία παριστάνει την εξίσωση της παραβολής στο επίπεδο-xy.

5) Απλή αρμονική κίνηση

Η ασκούμενη εξωτερική δύναμη επί του σώματος είναι: $\vec{F} = -k\vec{r}$, ή στη μία διάσταση F=–kx (όπου x ή $\vec{r}$ είναι η μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του). **Να προσδιοριστεί η κίνηση του σώματος.**

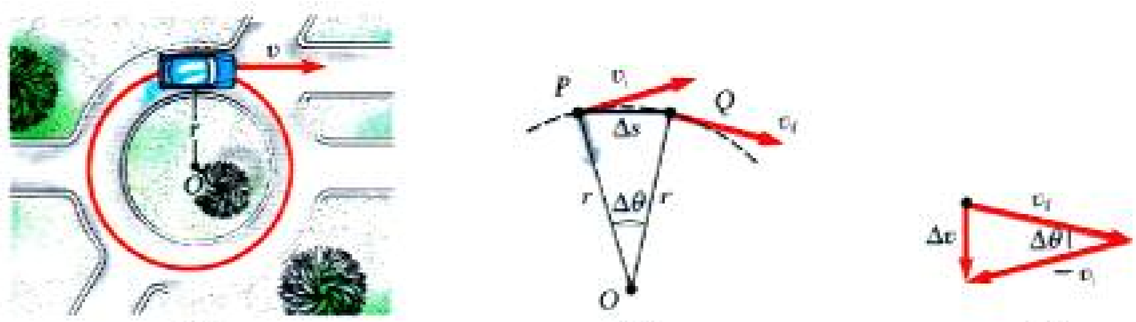


Αναλυτικοί υπολογισμοί (στη 1D): Δίδεται ότι F=-kx, άρα $a \equiv a_x = F_x/m = -k/m\ x \neq$ const. Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα: F=ma, λαμβάνομε - kx=ma. Όμως $a=d^2x/dt^2$, άρα $d^2x/dt^2 = -k/m\ x$ (1). Η εξίσωση αυτή είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως.

Επίλυση της (1): Πολλαπλασιάζομε και τα δύο μέλη της (1) επί x' ⇒ x'x''=-k/m xx' ή $\frac{d}{dt}\frac{(x')^2}{2} = -\frac{k}{m}\frac{d}{dt}\frac{x^2}{2}$ ή $(x')^2 = -\frac{k}{m}x^2 + c$, όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης. Λύνομε ως προς x': ⇒ $x' = \pm\sqrt{c - \frac{k}{m}x^2}$ ή $x' = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{cm}{k} - x^2}$. Ορίζουμε τις σταθερές: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ και $\alpha^2 = \frac{cm}{k}$ οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται: $x' = \pm\omega\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ ή $\frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{\alpha^2 - x^2}$. Η σχέση αυτή ολοκληρώνεται αμέσως, αφού διαχωρίσουμε πρώτα τις μεταβλητές: $\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \pm\omega dt$ ή $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \pm\int\omega dt$, απ' όπου παίρνομε $\sin^{-1}(\frac{x}{\alpha}) = \pm\omega t + \delta$, όπου δ η νέα σταθερά ολοκλήρωσης. Η συνάρτηση αυτή αντιστρέφεται: x=αsin(±ωt+φ)=±αsin(ωt±φ) ή γενικά $x=x_o\sin(\omega t+\varphi)$, όπου $x_o=\pm\alpha$ και φ=±δ είναι δύο αυθαίρετες σταθερές (οι οποίες προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες) και $\omega = \sqrt{k/m}$ είναι η συχνότητα ταλάντωσης.

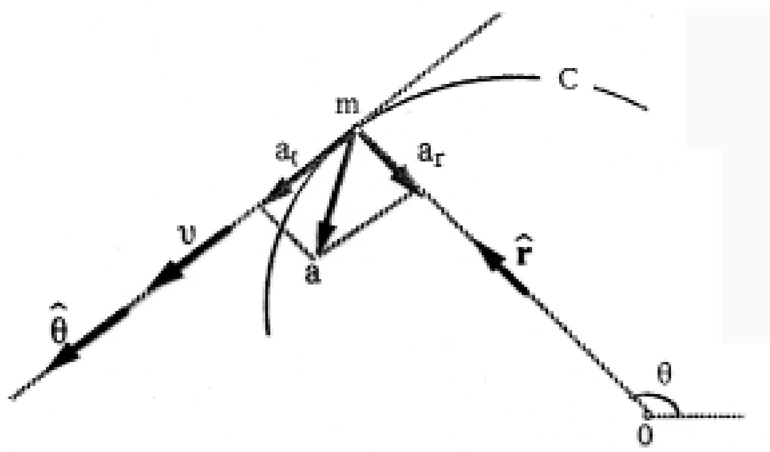
6) Κυκλική κίνηση.

Η ασκούμενη εξωτερική δύναμη επί του σώματος είναι κάθετη προς την διεύθυνση κίνησής του (όπως η δύναμη Lorentz, $\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$, στη περίπτωση της κίνησης φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο). **Να προσδιοριστεί η κίνηση του σώματος.**



(a) (b) (c)

Εφαπτομενική και κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης στη καμπυλόγραμμη κίνηση:



0 : **καλείται κέντρο καμπυλότητος**
r : **καλείται ακτίνα καμπυλότητος**

$\hat{\theta}$ ή $\hat{\mathbf{u}}_t$ **: είναι το μοναδιαίο διάνυσμα επί της εφαπτομενικής διεύθυνσης**

$\hat{\mathbf{r}}$ ή $\hat{\mathbf{u}}_r$ **: είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης (από το 0 προς το σώμα)**

ταχύτης: $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{\theta}$

επιτάχυνση: $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon\hat{\theta}) = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{\theta} + \upsilon\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{\theta} + \upsilon(\frac{\upsilon}{r}\hat{r}) \equiv \vec{a}_t + \vec{a}_r$

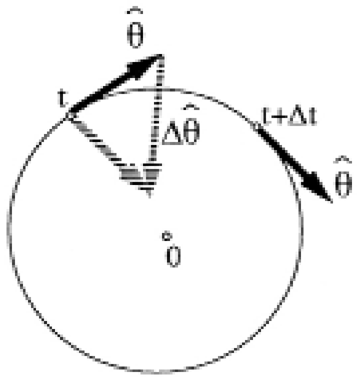
όπου

$\vec{a}_t = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{\theta}$ **: είναι η επιτρόχιος συνιστώσα της επιτάχυνσης,**

$\vec{a}_r = \frac{\upsilon^2}{r}\hat{r}$ **: η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης.**

Στην ΕΙΣΑΓΩΓΗ αποδεικνύεται (βλέπε και επόμενο σχήμα) ότι:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\hat{r}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -\hat{r}\omega$$



Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα στη κυκλική κίνηση:

α) εφαπτομενική διεύθυνση: $F_t = m\, a_t$

β) ακτινική διεύθυνση: $F_r = m\, a_r$

όπου $a_r = \frac{\upsilon^2}{r}$ **και** $a_t = \frac{d\upsilon}{dt}$

$\omega = \dfrac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dt}}$: είναι η **γωνιακή ταχύτης (μονάδες: rad/sec ή sec^{-1})**

και η ταχύτης (πάντα κατά την εφαπτομενική διεύθυνση)

$$\upsilon = \omega r \qquad \textbf{ή} \qquad \vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}} = \omega \mathbf{r} \sin\gamma \ \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}}$$