ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2008-9

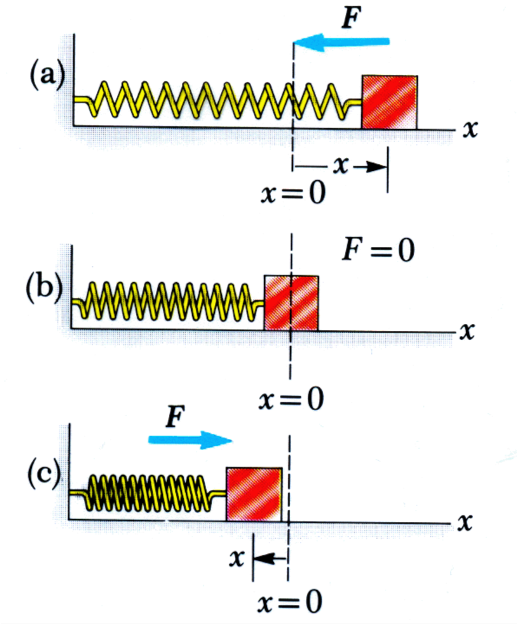
ΜΙΧΑΗΛ ΒΕΛΓΑΚΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Φροντιστήριο 1^{ο}:

Εξίσωση κίνησης των σωμάτων και επίλυση

(ΣΤΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ)

Παράδειγμα 1^{ο} (αρμονική ταλάντωση): ***Επί (σημειακού) σώματος εφαρμόζεται δύναμη επαναφοράς της μορφής: $\vec{F} = -k\vec{r}$. Να προσδιοριστεί η κίνηση του σώματος, λαμβάνοντας υπόψη και τις εξωτερικές τριβές που ασκούνται πάνω στο σώμα (παρεμπιπτόντως, υπάρχουν και εσωτερικές δυνάμεις τριβής).***



Στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων:

Διάνυσμα θέσης του σώματος: $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \equiv (x, y, z)$

Ταχύτης του σώματος: $\vec{\upsilon} \equiv \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k} \equiv (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$

Επιτάχυνση του σώματος:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \equiv (a_x, a_y, a_z)$$

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα: Η επιτάχυνση ενός σώματος είναι ανάλογος της (συνολικής) δύναμης που δρα πάνω στο σώμα, δηλ. $\vec{F} = m\vec{a}$, η οποία αναλύεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x \\ F_y &= ma_y \\ F_z &= ma_z \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad \begin{aligned} F_x &= m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1\alpha) \\ F_y &= m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (1\beta) \\ F_z &= m\frac{d^2z}{dt^2} \qquad (1\gamma) \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις (1α), (1β), (1γ) είναι ακριβώς ίδιες [απλά η εξηρτημένη μεταβλητή στην (1α) συμβολίζεται με x, στην (1β) με y, και στην (1γ) με z]. Άρα δουλεύουμε μόνο την (1α), η οποία γράφεται:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - F_{\tau\rho\iota\beta\acute{\eta}\varsigma} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις για τη δύναμη τριβής $F_{\tau\rho\iota\beta\acute{\eta}\varsigma}$:

α) Μπορεί η δύναμη τριβής να είναι σταθερά, δηλ. $F_{τριβής}$=α, οπότε η (2) γράφεται:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\,,$$

και η οποία μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{a}{m} \qquad (3)}$$

Θεωρώντας την αλλαγή μεταβλητών: $x \rightarrow x_1 = x + \frac{a}{k}$, παρατηρούμε ότι: $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt}$ και $\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$, οπότε η (3) γράφεται:

$$\boxed{\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k}{m}x_1 = 0 \qquad (4)}$$

Η εξίσωση (4) καλείται ομογενής διαφορική εξίσωση $2^{ας}$ τάξεως. Επιλύουμε την (4) παρακάτω και βρίσκουμε τη λύση:

$x_1 = A\sin(\omega t + \varphi)$, *όπου* $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega \in \Re$, και $\omega > 0$,

και Α,φ είναι σταθερές ολοκλήρωσης, ο οποίες μπορούν να υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες, δεδομένων των ποσοτήτων $x_o = x(t=0)$ και $\upsilon_o = \upsilon(t=0)$ για t=0. Η λύση αυτή παριστάνει ταλάντωση (ή απλή αρμονική κίνηση).

α1) Αξίζει να σημειωθεί η περίπτωση k=0, δηλ. όταν δεν εφαρμόζεται καμιά γραμμική δύναμη επαναφοράς. Τότε η λύση της (3) θα έχει τη μορφή (μετά από απλή ολοκλήρωση):

$$x = x_o + \upsilon_o t - \frac{1}{2}\frac{a}{m}t^2 ,$$

η γνωστή μας σχέση για την ομαλώς επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση, με επιβράδυνση –α/m. Οι σταθερές ολοκλήρωσης, $x_o=x(t=0)$ και $\upsilon_o=\upsilon(t=0)$ υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες για t=0.

β) Μπορεί η δύναμη τριβής να είναι ανάλογος της ταχύτητας, δηλ. $F_{τριβής}=-\alpha\upsilon$ [όπου η σταθερά α καλείται σταθερά απόσβεσης. Το μείον εδώ σημαίνει ότι η δύναμη τριβής έχει αντίθετη φορά με εκείνη της ταχύτητας, αλλά να μην αντικαταστήσουμε στη (2) το μείον δύο φορές!!].

Η (2) λοιπόν γράφεται:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\upsilon ,$$

ή

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (5)}$$

Η εξίσωση (5) καλείται (ομογενής) γραμμική διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως, την οποία θα επιλύσουμε παρακάτω. Θα βρούμε ότι η λύση της (5) έχει τη μορφή:

$x = Ae^{-\frac{a}{2m}t}cos(\omega t + \varphi)$, όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{a}{2m})^2}$, $\omega \in \Re$, και $\omega > 0$,

και Α,φ σταθερές ολοκλήρωσης, ο οποίες μπορούν να υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες, δεδομένων των ποσοτήτων $x_o=x(t=0)$ και $\upsilon_o=\upsilon(t=0)$ για t=0. Η λύση αυτή παριστάνει ταλάντωση με απόσβεση (damped oscillation).

β1) Για να κλείσουμε τη παράγραφο αυτή, θεωρούμε τη περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, κατά την οποίαν πάνω στο σώμα δρα και μια εξωτερική περιοδική δύναμη, ας πούμε της μορφής: $F = F_o \sin\omega t$. Τώρα η εξίσωση κίνησης (5) θα έχει τη μορφή:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + av = F_o \sin\omega t\,,$$

ή

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_o}{m}\sin\omega t \qquad (6)}$$

Η εξίσωση (6) καλείται **μη-γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ας} τάξης**, την οποία θα επιλύσουμε παρακάτω [Θα ξανασυναντήσουμε την εξίσωση (6) στις ταλαντώσεις ηλεκτρικών κυκλωμάτων που διεγείρονται από εξωτερική εναλλασσόμενη τάση]. Θα βρούμε παρακάτω ότι οι λύσεις της (6) είναι το άθροισμα των λύσεων της ομογενούς διαφ. εξίς. (5) συν μια **μερική λύση** (particular solution), $F_{μερική}(t)$, την οποίαν θα προσδιορίσουμε, δηλ.

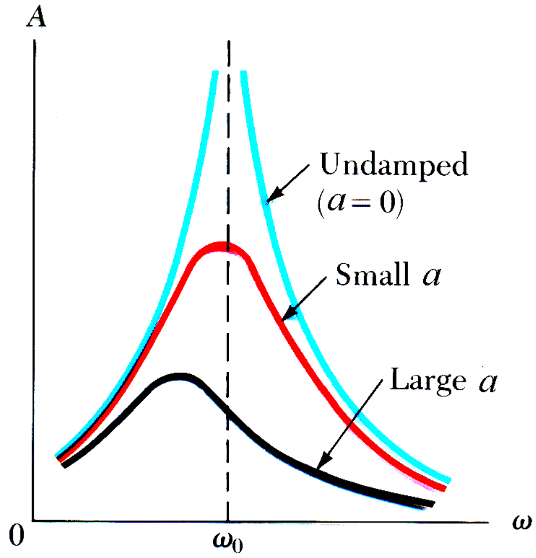
$$x(t) = Ae^{-\frac{a}{2m}t}\cos(\omega_1 t + \varphi) + F_{μερική}(t)\,, \text{ όπου } \omega_1 = \sqrt{\tfrac{k}{m} - (\tfrac{a}{2m})^2}\,.$$

Κατ' αρχήν, η λύση της ομογενούς (5) (η οποία λέγεται και **μεταβατική λύση**) μηδενίζεται μέσα σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα (είδαμε ότι για t>5τ η λύση αυτή είναι αμελητέα). Άρα, στην ουσία μας ενδιαφέρει η λύση που θα επιζεί για πεπερασμένους χρόνους t και αυτή είναι μόνο η μερική λύση, $F_{μερική}(t)$, η οποία όπως θα βρούμε έχει τη μορφή,

$$F_{μερική}(t) = A\sin(\omega t + \delta)\,,$$

όπου $\tan\delta = -\dfrac{a\omega/m}{(\omega_o^2 - \omega^2)}$ και $A = \dfrac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2 + (a\omega/m)^2}}$

Δηλαδή στην εξαναγκασμένη ταλάντωση το σώμα εκτελεί ίδια ταλάντωση (με κάποια διαφορά φάσης δ) με εκείνη του εξωτερικού διεγέρτη (με την ίδια συχνότητα), αλλά με πλάτος ταλάντωσης A=f(ω), του οποίου η συμπεριφορά απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Όταν ω→ω₀, λέμε ότι το σύστημα συντονίζεται με τον εξωτερικό διεγέρτη και καθώς οι εσωτερικές τριβές α→0, το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος μεγαλώνει (→∞)

Αναλυτικοί υπολογισμοί :

Επίλυση της (4): Σημειώνουμε ότι ο δείκτης-1 στην εξηρτημένη μεταβλητή εξ. (4) δεν παίζει κανένα ρόλο, επομένως τον παραλείπουμε στη συνέχεια. Πολλαπλασιάζομε και τα δύο μέλη της (4) επί x' (όπου x' υποδηλώνει τη παράγωγο $\frac{dx}{dt}$), οπότε έχουμε: x'x''=-k/m xx', η οποία γράφεται: $\frac{d}{dt}\frac{(x')^2}{2} = -\frac{k}{m}\frac{d}{dt}\frac{x^2}{2}$ ή $\frac{d}{dt}[\frac{(x')^2}{2}+\frac{k}{m}\frac{x^2}{2}]=0$, που σημαίνει ότι η ποσότης μέσα στην αγκύλη είναι σταθερά, δηλ. $(x')^2+\frac{k}{m}x^2=c$, όπου c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Λύνομε τη τελευταία σχέση ως προς x': $x'=\pm\sqrt{c-\frac{k}{m}x^2}$ ή $x'=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{cm}{k}-x^2}$. Ορίζουμε τις σταθερές: $\omega\equiv\sqrt{\frac{k}{m}}$ και $x_o{}^2\equiv\frac{cm}{k}$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται: $x'=\pm\omega\sqrt{x_o{}^2-x^2}$ ή $\frac{dx}{dt}=\pm\omega\sqrt{x_o{}^2-x^2}$. Η σχέση αυτή ολοκληρώνεται διαχωρίζοντας τις μεταβλητές: $\frac{dx}{\sqrt{x_o{}^2-x^2}}=\pm\omega dt$ ή $\int\frac{dx}{\sqrt{x_o{}^2-x^2}}=\pm\int\omega dt$, απ' όπου παίρνομε $sin^{-1}(\frac{x}{x_o})=\pm\omega t+\delta$, όπου δ είναι η νέα σταθερά ολοκλήρωσης. Η τελευταία συνάρτηση αντιστρέφεται και παίρνουμε: $x=x_o\,sin(\pm\omega t+\delta)=\pm x_o\,sin(\omega t\pm\delta)=A\,sin(\omega t+\varphi)$, όπου $A=\pm x_o$ και $\varphi=\pm\delta$. Βρήκαμε λοιπόν τη λύση: $x = A\,sin(\omega t + \varphi)$, όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ μια σταθερά που καλείται συχνότητα ταλάντωσης, οι δε σταθερές ολοκλήρωσης *Α,φ* προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες για *t=0*.

Επίλυση της (5): Η εξίσωση (5) ομογενής διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως (αλλά δεν λύνεται τόσο εύκολα με απλή ολοκλήρωση). Για να λυθεί δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής: $x = Ae^{\lambda t}$, οπότε υπολογίζουμε τις παραγώγους: $x' = \lambda A e^{\lambda t}$ και $x'' = \lambda^2 A e^{\lambda t}$. Αντικαθιστώντας στην (5) παίρνουμε:

$$\lambda^2 x + \frac{\alpha}{m}\lambda x + \frac{k}{m}x = 0$$

ή

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 .$$

Η λύση του τριωνύμου αυτού είναι: $\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{(\frac{\alpha}{2m})^2 - \frac{k}{m}}$. Επειδή ο όρος της τριβής $\frac{a}{2m}$ είναι πολύ μικρός (συνήθως), η διακρίνουσα $\Delta = (\frac{a}{2m})^2 - \frac{k}{m}$ είναι αρνητική (συνήθως). Καλώντας $\omega^2 \equiv \frac{k}{m} - (\frac{a}{2m})^2 > 0$, οι λύσεις $\lambda_{1,2}$ γράφονται: $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2m} \pm i\omega$, όπου i είναι η φανταστική μονάδα. Επομένως οι δύο λύσεις της (5) θα είναι: $x_1 = A_1 e^{\lambda_1 t}$ και $x_2 = A_2 e^{\lambda_2 t}$, όπου A_1, A_2 οι δύο σταθερές ολοκλήρωσης. Συνεπώς, η γενική λύση της (5) θα είναι το άθροισμα των δύο επιμέρους λύσεων (θεωρία διαφορικών εξισώσεων), δηλ.

$$x = x_1 + x_2 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{a}{2m}t}(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}). \quad (\alpha)$$

Η παρένθεση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής: $A\cos(\omega t + \varphi)$ (γιατί;). Οπότε, η γενική λύση της (5) θα έχει τη μορφή:

$$x = Ae^{-\frac{a}{2m}t} cos(\omega t + \varphi), \text{ όπου } \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{a}{2m})^2} .$$

Ακολουθεί η απόδειξη του προηγούμενου ισχυρισμού: Πράγματι, θεωρούμε την παρένθεση στο 2ο μέρος της (α). Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler: $e^{\pm i\varepsilon} = cos\,\varepsilon \pm i\,sin\,\varepsilon$ (όπου ε είναι το όρισμα της τριγ. συνάρτησης), η παρένθεση στην (α) γράφεται:

$$\begin{aligned} A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} &= A_1(cos\,\omega t + i\,sin\,\omega t) + A_2(cos\,\omega t - i\,sin\,\omega t) \\ &= (A_1 + A_2)cos\,\omega t + i(A_1 - A_2)sin\,\omega t \qquad (\beta) \end{aligned}$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα στο 2ο μέρος της (β) τη ποσότητα (A_1+A_2), οπότε η (β) ισούται

$$= (A_1 + A_2)\{cos\,\omega t + \frac{i(A_1 - A_2)}{(A_1 + A_2)} sin\,\omega t\}. \quad (\gamma)$$

Καλούμε το κλάσμα μέσα στη αγκύλη *tanφ (ή ctanφ*, γιατί;)[†], δηλ. $tan\,\varphi = -\frac{i(A_1 - A_2)}{(A_1 + A_2)}$, οπότε η (γ) ισούται

[†] τότε θα προέκυπτε η τριγωνομετρική συνάρτηση sin(ωt+φ)!

$$= (A_1 + A_2)\{\cos\omega t - \tan\varphi \sin\omega t\} \qquad (\delta)$$

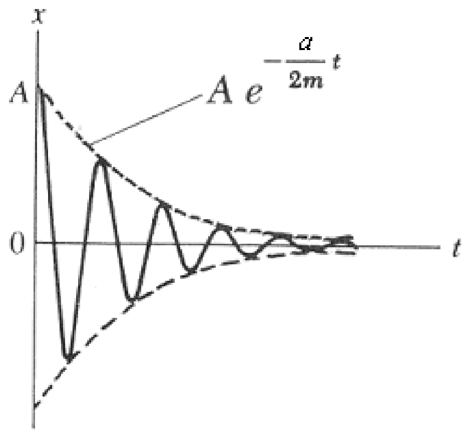
Αναπτύσσοντας την εφαπτομένη σε ημίτονο και συνημίτονο, παίρνομε:

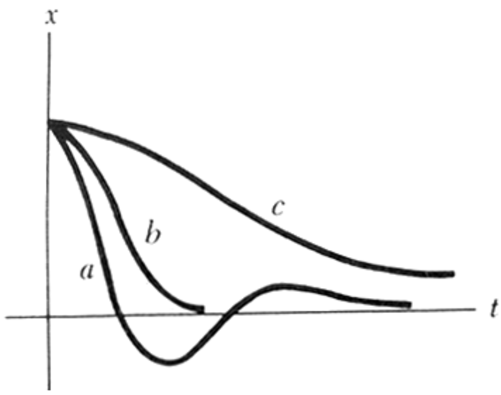
$$= (A_1 + A_2)\frac{\{\cos\omega t \cos\varphi - \sin\varphi \sin\omega t\}}{\cos\varphi} = \frac{(A_1 + A_2)}{\cos\varphi}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (\varepsilon)$$

Καλούμε το σταθερό παράγοντα στην (ε) A, δηλ. $A \equiv \dfrac{(A_1 + A_2)}{\cos\varphi}$, οπότε τελικά η (α) γράφεται:

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi), \text{ όπου } \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{a}{2m})^2}.$$

Οι σταθερές A,φ είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης, οι οποίες υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες για *t=0*. Η ποσότης $\omega_o \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ καλείται **ιδιοσυχνότητα** του συστήματος και η ποσότης $\tau = \frac{2m}{a}$ στον εκθέτη (που έχει μονάδες χρόνου) καλείται **σταθερά χρόνου**. Για t≅5τ , ο εκθετικός παράγοντας ισούται με $e^{-5} = 0.007$, δηλ. τότε x≅0 και το σώμα σχεδόν ηρεμεί!!





Στη περίπτωση a η διακρίνουσα Δ<0 (αποσβενόμενη ταλάντωση), στη περίπτωση b είναι Δ=0 (κρίσιμη αποσβεννόμενη κίνηση), και στη περίπτωση c είναι Δ>0 (υπερ-αποσβεννόμενη κίνηση)

Επίλυση της (6): Η εξίσωση (6) είναι μη-γραμμική διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως. Επειδή ο μη-γραμμικός όρος στην (6) έχει τριγωνομετρική μορφή, δοκιμάζουμε ως μερική λύση τριγωνομετρική συνάρτηση της μορφής:

$$F_{\mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}}(t) = A\sin(\omega t+\delta)^{\clubsuit} \quad \text{(στ)}$$

Αντικαθιστώντας την (στ) στην (6) παίρνουμε,

$$-A\omega^2\sin(\omega t+\delta)+\frac{a}{m}A\omega\cos(\omega t+\delta)+\frac{k}{m}A\sin(\omega t+\delta)=\frac{F_o}{m}\sin\omega t$$

Αναπτύσσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις: $\sin(\omega t+\delta)=\sin\omega t\cos\delta+\cos\omega t\sin\delta$, κλπ

$$(\frac{k}{m}-\omega^2)(\sin\omega t\cos\delta+\cos\omega t\sin\delta)+\frac{a\omega}{m}(\cos\omega t\cos\delta-\sin\omega t\sin\delta)=\frac{F_o}{Am}\sin\omega t$$

Μετά από αναγωγή ίδιων όρων, λαμβάνουμε,

$$\left((\frac{k}{m}-\omega^2)\cos\delta-\frac{a\omega}{m}\sin\delta-\frac{F_o}{Am}\right)\sin\omega t+\left((\frac{k}{m}-\omega^2)\sin\delta+\frac{a\omega}{m}\cos\delta\right)\cos\omega t=0 \quad \text{(ζ)}$$

Επειδή οι συναρτήσεις sinωt, cosωt είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι, θα πρέπει οι συντελεστές τους στην εξίσωση (ζ) να μηδενίζονται, δηλ. προκύπτει το σύστημα:

$$(\frac{k}{m}-\omega^2)\cos\delta-\frac{a\omega}{m}\sin\delta-\frac{F_o}{Am}=0 \quad \text{(η1)}$$

$$(\frac{k}{m}-\omega^2)\sin\delta+\frac{a\omega}{m}\cos\delta=0 \quad \text{(η2)}$$

Η εξίσωση (η2) δίδει αμέσως: $\tan\delta=-\dfrac{a\omega/m}{(\frac{k}{m}-\omega^2)}$ ή $\tan\delta=-\dfrac{a\omega/m}{(\omega_o^2-\omega^2)}$, όπου $\omega_o^2\equiv\dfrac{k}{m}$.

Υπολογίζουμε πρώτα τις συναρτήσεις sinδ, cosδ, συναρτήσει της tanδ:

$$\sin\delta=\frac{\tan\delta}{\sqrt{1+\tan^2\delta}}=\frac{-a\omega/m}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(\frac{a\omega}{m})^2}}$$

$$\cos\delta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\delta}}=\frac{(\omega_o^2-\omega^2)}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(\frac{a\omega}{m})^2}}$$

τις οποίες αντικαθιστώντας στην (η1), λαμβάνουμε,

$$(\omega_o^2-\omega^2)^2+(\frac{a\omega}{m})^2=\frac{F_o}{Am}\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(\frac{a\omega}{m})^2}$$

ή

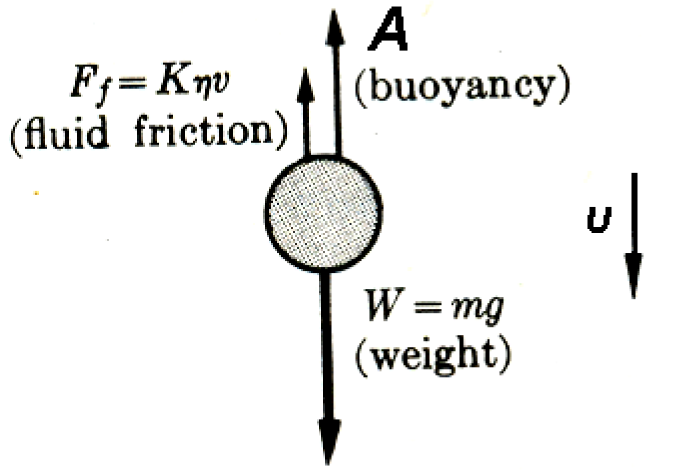
♣ Θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει ισοδύναμα τριγωνομετρικές συναρτήσεις της μορφής: *A cos(ωt+δ)* ή *A sinωt + B cosωt*

$$A = \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o{}^2 - \omega^2)^2 + (\frac{a\omega}{m})^2}}$$

Η μερική λύση λοιπόν της (6) έχει τη μορφή:

$$F_{\mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}}(t) = A\sin(\omega t + \delta),\ \text{όπου}\ \tan\delta = -\frac{a\omega / m}{(\omega_o{}^2 - \omega^2)},\quad A = \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o{}^2 - \omega^2)^2 + (\frac{a\omega}{m})^2}}$$

***Παράδειγμα 2^o (επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση)* Να υπολογιστεί η ταχύτητα ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου, το οποίο κινείται μέσα σε ιξώδες ρευστό, δηλ. η δύναμη της αντίστασης του ρευστού έχει τη μορφή: $F_f = -K\eta\upsilon$, όπου K είναι σταθερά που εξαρτάται από το σχήμα του σώματος (π.χ. για σφαιρικό σχήμα K=6πR), υ είναι η ταχύτητα του σώματος, και η μια σταθερά που καλείται συντελεστής ιξώδους του ρευστού (π.χ. για το νερό ισούται με 1.005×10^{-2}Poise στους 20^{o}C, για το καστορέλαιο 9.86×10^{-2}Poise,... Σημ.: 1Poise=10^{-1}Pascal×sec).**



Λύση: Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα είναι το βάρος του (με κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα κάτω), η άνωση από το ρευστό A=$\rho_{\rho\varepsilon\upsilon}$gV (με φορά κατακόρυφα προς τα πάνω, όπου $\rho_{\rho\varepsilon\upsilon}$ είναι η πυκνότητα του ρευστού) και η αντίσταση που δέχεται το σώμα κατά τη κίνηση από το ρευστό $F_f = -K\eta\upsilon$ (το μείον απλά τονίζει το γεγονός ότι ο φορά της δύναμης είναι πάντοτε αντίθετη προς τη ταχύτητα) (Υποθέτουμε ότι το σώμα πέφτει προς τα κάτω, χωρίς να χάνεται η γενικότητα. Θα μπορούσαμε να εξετάζουμε τη κίνηση ενός μπαλονιού στον αέρα, οπότε η κίνηση θα ήταν προς τα πάνω).

Η εξίσωση κίνησης (1β) γράφεται για τη περίπτωση,

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - K\eta\upsilon - \rho_{\rho\varepsilon\upsilon} gV \qquad (7)$$

[Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε μια αυτοκριτική, αν έχουμε διαλέξει σωστά τα πρόσημα στη σχέση (7). Πριν όμως ξεκινήσουμε τη λύση, θα έπρεπε να έχουμε αποφασίσει πού ορίζουμε την αρχή των συντεταγμένων 0, ει δυνατόν με κάποιο παρατιθέμενο σχήμα. Ορίζουμε λοιπόν την αρχή των αξόνων πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού, όπου υποθέτουμε ότι αφήνουμε το σώμα να πέσει ("αφήνουμε" σημαίνει ότι η αρχική ταχύτης: υ_o=0! Σημαίνει ακόμη ότι με αυτή την επιλογή της αρχής συντεταγμένων που κάναμε: y_o=0!). Οπότε η φορά της ταχύτητας είναι θετική προς τα κάτω, το βάρος mg είναι θετικό προς τα κάτω, και οι υπόλοιπες δυνάμεις κατευθύνονται προς τα πάνω, άρα είναι αρνητικές, άρα τελικά, τα πρόσημα στην (7) είναι σωστά!]. Όμως η επιτάχυνση του $1^{ου}$ μέρους της (7) μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, ανάλογα με το πρόσημο του $2^{ου}$ μέρους].

Η (7) μπορεί να γραφεί,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{K\eta}{m}\frac{dy}{dt} - \frac{(\rho - \rho_{\rho\varepsilon\upsilon})gV}{m} = 0 \qquad (8)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση: $m = \rho gV$, όπου ρ η πυκνότητα του σώματος. Για ν' απλουστεύουμε την (8), θέτομε: $\gamma = K\eta / m > 0$ και $\delta = (\rho - \rho_{\rho\varepsilon\upsilon})gV / m = (1 - \frac{\rho_{\rho\varepsilon\upsilon}}{\rho})g$.

Αν ισχύει $\rho > \rho_{\rho\varepsilon\upsilon}$, τότε $\delta > 0$. Οπότε η διαφορική εξίσωση (8) γράφεται,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{dy}{dt} - \delta = 0 \qquad (9)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (9) υπολογίζεται παρακάτω. Βρίσκουμε ότι η ταχύτητα έχει τη μορφή:

$$\upsilon = \upsilon_{o\rho}(1 - e^{-t/\tau}), \text{ όπου } \tau \equiv \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{K\eta}, \ \upsilon_{o\rho} \equiv \frac{\delta}{\gamma} = (1 - \frac{\rho_{\rho\varepsilon\upsilon}}{\rho})\frac{mg}{K\eta}$$

Επίλυση της (9): Η (9) μπορεί να ολοκληρωθεί αμέσως. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη ταχύτητα υ=dy/dt, η (9) γράφεται: $\frac{d\upsilon}{dt}+\gamma\upsilon-\delta=0$, και διαχωρίζοντας τις μεταβλητές έπεται: $\frac{d\upsilon}{\delta-\gamma\upsilon}=dt$, ή $\frac{d(\delta-\gamma\upsilon)}{\delta-\gamma\upsilon}=-\gamma dt$. Ολοκληρώνοντας $\int\frac{d(\delta-\gamma\upsilon)}{\delta-\gamma\upsilon}=-\int\gamma dt$ έχομε:

$$ln(\delta-\gamma\upsilon)=-\gamma t+c, \quad (\theta)$$

όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης, η οποία υπολογίζεται εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες: για t=0 έχομε υ=0, οπότε αντικαθιστώντας στην (θ) έχομε: $ln\delta=-0+c$, ή $c=ln\delta$. Επομένως η (θ) γράφεται: $ln(\delta-\gamma\upsilon)=-\gamma t+ln\delta$, ή $ln(\frac{\delta-\gamma\upsilon}{\delta})=-\gamma t$. Η σχέση αντιστρέφεται, $1-\frac{\gamma\upsilon}{\delta}=e^{-\gamma t}$, και λύνοντας ως προς υ:

$$\upsilon=\frac{\delta}{\gamma}(1-e^{-\gamma t}), \qquad (\iota)$$

όπου $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{(\rho-\rho_{\rho\varepsilon\upsilon})gV}{K\eta}=(1-\frac{\rho_{\rho\varepsilon\upsilon}}{\rho})\frac{mg}{K\eta}$. Παρατηρούμε ακόμη στην (ι) ότι για t=0 πράγματι προκύπτει υ=0, ενώ για t→∞ παίρνομε $\upsilon=\frac{\delta}{\gamma}$. Η ποσότης $\frac{\delta}{\gamma}$ έχει διαστάσεις ταχύτητος και καλείται οριική ταχύτητα, δηλ. $\upsilon_{o\rho}\equiv\frac{\delta}{\gamma}=(1-\frac{\rho_{\rho\varepsilon\upsilon}}{\rho})\frac{mg}{K\eta}$. Ακόμη, η σταθερά γ έχει διαστάσεις $[\gamma]=m\frac{Nt}{m^2}sec/Kgr=\frac{Kgr\cdot m/sec^2}{m}\frac{sec}{Kgr}=\frac{1}{sec}$, οπότε εισάγοντας τη σταθερά $\tau\equiv\frac{1}{\gamma}=\frac{m}{K\eta}$ (η οποία καλείται **σταθερά χρόνου ή χρόνος αποκατάστασης**), τελικά η ταχύτητα (ι) γράφεται:

$$\upsilon=\upsilon_{o\rho}(1-e^{-t/\tau}), \qquad (\iota\alpha)$$

όπου $\tau=\frac{m}{K\eta}$ και $\upsilon_{o\rho}=(1-\frac{\rho_{\rho\varepsilon\upsilon}}{\rho})\frac{mg}{K\eta}$. Η σχέση (ια) μπορεί να ολοκληρωθεί περαιτέρω για να υπολογιστεί η συνάρτηση: *y=f(t),* που όμως δεν ζητείται στην εκφώνηση.

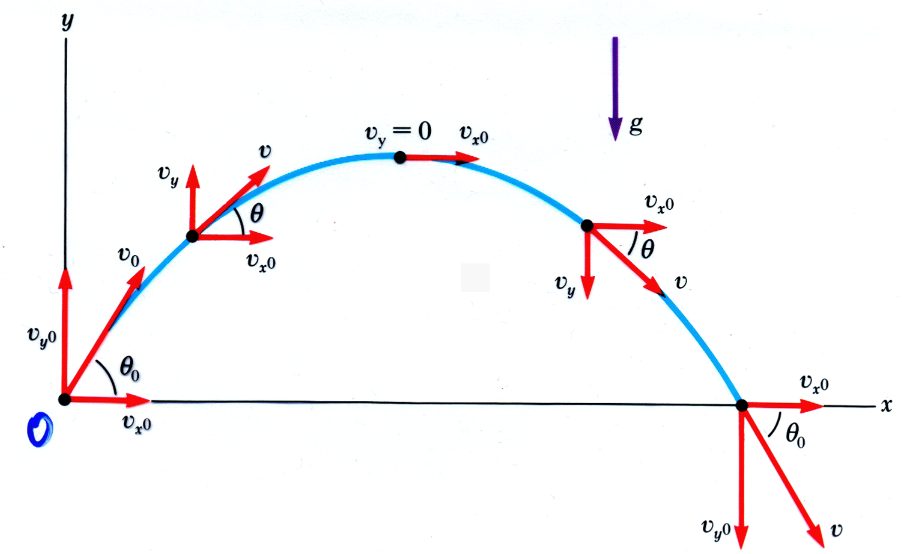
Παράδειγμα 3ο (πλάγια βολή με τριβές) Να μελετηθεί η κίνηση σώματος που βάλλεται μέσα στον αέρα με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o=\upsilon_{ox}\vec{i}+\upsilon_{oy}\vec{j}+\upsilon_{oz}\vec{k}\equiv(\upsilon_{ox},\upsilon_{oy},\upsilon_{oz})$, λαμβανομένης υπόψη και της αντίστασης του αέρα $\vec{F}_f=-K\eta\vec{\upsilon}$, όπου Κ είναι σταθερά που εξαρτάται από το σχήμα του σώματος (π.χ. για σφαιρικό σχήμα Κ=6πR) και υ η ταχύτητα του σώματος.

Λύση. Το επίπεδο μέσα στο οποίο κινείται το σώμα λαμβάνεται σαν επίπεδο x-y (βλέπε σχήμα και πρόσεξε τη φορά των αξόνων). Στο σώμα ασκείται επί πλέον η δύναμη του βάρους του, $\vec{B} = -mg\,\vec{j}$. Οι εξισώσεις κίνησης (1α) και (1β) γράφονται για τη περίσταση,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F_{fx}, \qquad (10α)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -F_{fy} - mg, \qquad (10β)$$

όπου $F_{fx} = -K\eta\upsilon_x$ *και* $F_{fy} = -K\eta\upsilon_y$ *είναι οι συνιστώσες της αντίστασης του αέρα κατά τους άξονες x και y, αντίστοιχα.* [Το μείον, όπως επισημάναμε, υποδηλώνει το γεγονός ότι οι δυνάμεις τριβών ή αντιστάσεις έχουν αντίθετη φορά με εκείνη της ταχύτητας, αλλά χρειάζεται προσοχή όταν γίνεται αντικατάστασή τους στις (1α) και (1β) να μην εισάγουμε το μείον δύο φορές!!].



Αναλυτικότερα οι εξισώσεις κίνησης (10) γράφονται,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K\eta\upsilon_x,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -K\eta\upsilon_y - mg,$$

ή

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}=0 \qquad (11α)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\gamma\frac{dy}{dt}+g=0 \quad (11β)$$

όπου $\gamma = K\eta / m$>0. Οι διαφορικές εξισώσεις (11), αν και είναι ίδιες με την (9), εν τούτοις ξανα-επιλύονται για εξάσκηση. Βρίσκουμε λοιπόν παρακάτω τις εξής λύσεις:

$$x=\frac{\upsilon_{ox}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t}),$$

$$y=\frac{1}{\gamma^2}\left\{-\gamma g t+(g+\gamma\upsilon_{oy})(1-e^{-\gamma t})\right\}, \quad \acute{o}\pi o\upsilon \;\; \gamma\equiv\frac{K\eta}{m}.$$

Επίλυση της (11α): Η (11α) ολοκληρώνεται εύκολα. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη ταχύτητα $\upsilon_x = dx/dt$, η (11α) γράφεται: $\frac{d\upsilon_x}{dt}+\gamma\upsilon_x=0$, και διαχωρίζοντας τις μεταβλητές έπεται, $\frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x}=-\gamma dt$.

Η σχέση αυτή ολοκληρώνεται: $\int\frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x}=-\int\gamma dt$ ή $ln(\upsilon_x)=-\gamma t+c$, (ιβ)

όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης, η οποία υπολογίζεται εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες: για t=0 έχομε $\upsilon_x=\upsilon_{ox}=\upsilon_o\cos\theta_o$, οπότε αντικαθιστώντας στην (ιβ) έχομε: $ln(\upsilon_{ox})=-0+c$, ή $c=ln(\upsilon_{ox})$, και αντικαθιστώντας στη (ιβ): $ln(\upsilon_x)=-\gamma t+ln(\upsilon_{ox})$, ή $ln(\frac{\upsilon_x}{\upsilon_{ox}})=-\gamma t$. Η σχέση αντιστρέφεται και δίδει:

$\frac{\upsilon_x}{\upsilon_{ox}}=e^{-\gamma t}$, άρα $\qquad \upsilon_x=\upsilon_{ox}e^{-\gamma t}$, $\qquad$ (ιγ)

όπου $\gamma\equiv K\eta/m$. Παρατηρούμε ακόμη στην (ιγ) ότι για t=0 πράγματι βρίσκουμε $\upsilon_x=\upsilon_{ox}$, ενώ για $t\to\infty$ ισχύει $\upsilon_x\to 0$ (βέβαια πριν συμβεί αυτό, το σώμα πολύ πιθανόν να έχει κτυπήσει το έδαφος!).

Η σχέση (ιγ) μπορεί να ολοκληρωθεί περαιτέρω για να υπολογιστεί η συνάρτηση: *x=f(t).* Πράγματι, η (ιγ) γράφεται:

$$\frac{dx}{dt}=\upsilon_{ox}e^{-\gamma t}, \text{ ή } \int dx=\int\upsilon_{ox}e^{-\gamma t}dt, \text{ ή } x=-\frac{\upsilon_{ox}}{\gamma}e^{-\gamma t}+c_1 \quad (ιδ)$$

όπου c_1 η σταθερά ολοκλήρωσης, η οποία υπολογίζεται εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες: για t=0 έχομε x=0. αντικαθιστώντας στην (ιδ) έχομε: $0=-\frac{\upsilon_{ox}}{\gamma}+c_1$, άρα $c=\frac{\upsilon_{ox}}{\gamma}$. Συνεπώς, η (ιδ) γράφεται:

$$x=\frac{\upsilon_{ox}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t}), \qquad (ιε)$$

η οποία για t=0 πράγματι δίδει: x=0. Στη περίπτωση μηδενικής αντίστασης, δηλ. για Κ=γ=0, η (ιγ) δίδει: $\upsilon_x=\upsilon_{0x}=$ const., ενώ η (ιε) δίδει (χρησιμοποιώντας και τον κανόνα de l' Hospital):

$\lim_{\gamma\to 0}x=\upsilon_{ox}\lim_{\gamma\to 0}\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}=\upsilon_{ox}\lim_{\gamma\to 0}\frac{te^{-\gamma t}}{1}=\upsilon_{ox}t$, δηλ. καταλήγουμε σε γνωστές μας σχέσεις.

Επίλυση της (11β): Η (11β) μπορεί να ολοκληρωθεί αμέσως. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη ταχύτητα $\upsilon_y = dy/dt$, η (11β) γράφεται: $\frac{d\upsilon_y}{dt} + \gamma\upsilon_y + g = 0$, και διαχωρίζοντας τις μεταβλητές έπεται, $\frac{d\upsilon_y}{g+\gamma\upsilon_y} = -dt$, ή $\frac{d(g+\gamma\upsilon_y)}{g+\gamma\upsilon_y} = -\gamma dt$. Ολοκληρώνοντας $\int \frac{d(g+\gamma\upsilon_y)}{g+\gamma\upsilon_y} = -\int \gamma dt$ παίρνομε:
$ln(g+\gamma\upsilon_y) = -\gamma t + c_2$, (ιστ)

όπου c_2 η σταθερά ολοκλήρωσης, η οποία υπολογίζεται εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες: για t=0 έχομε $\upsilon_y = \upsilon_{oy} = \upsilon_o \sin\theta_o$, οπότε αντικαθιστώντας στην (ιστ) έχομε: $ln(g+\gamma\upsilon_{oy}) = -0 + c_2$, ή $c_2 = ln(g+\gamma\upsilon_{oy})$. Επομένως η (ιστ) γράφεται: $ln(g+\gamma\upsilon_y) = -\gamma t + ln(g+\gamma\upsilon_{oy})$, ή $ln(\frac{g+\gamma\upsilon_y}{g+\gamma\upsilon_{oy}}) = -\gamma t$. Η σχέση αντιστρέφεται και δίδει: $\frac{g+\gamma\upsilon_y}{g+\gamma\upsilon_{oy}} = e^{-\gamma t}$, η οποία λύνεται ως προς υ_y:

$$\upsilon_y = \frac{1}{\gamma}\left(-g + (g+\gamma\upsilon_{oy})e^{-\gamma t}\right), \quad (ιζ)$$

όπου $\gamma \equiv K\eta/m$. Η (ιζ) για t=0 πράγματι δίδει: $\upsilon_y = \upsilon_{oy}$. Στη περίπτωση μηδενικής αντίστασης, δηλ. για K=γ=0, η (ιζ) δίδει (χρησιμοποιώντας τον κανόνα de l' Hospital):

$$\lim_{\gamma\to 0} \upsilon_y = \lim_{\gamma\to 0} \frac{-g + (g+\gamma\upsilon_{oy})e^{-\gamma t}}{\gamma} = \lim_{\gamma\to 0} \frac{0 - t(g+\gamma\upsilon_{oy})e^{-\gamma t} + \upsilon_{oy}e^{-\gamma t}}{1} = \upsilon_{oy} - gt\,!!$$

Τέλος, η σχέση (ιζ) μπορεί να ολοκληρωθεί περαιτέρω για να υπολογιστεί η συνάρτηση: *y=f(t).* Πράγματι, η (ιζ) γράφεται: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\gamma}\left[-g + (g+\gamma\upsilon_{oy})e^{-\gamma t}\right]$, ή $\int dy = \frac{1}{\gamma}\int\left[-g + (g+\gamma\upsilon_{oy})e^{-\gamma t}\right]dt$, ή

$$y = -\frac{1}{\gamma}\left\{gt + \frac{1}{\gamma}(g+\gamma\upsilon_{oy})e^{-\gamma t}\right\} + c_3 \quad (ιη)$$

όπου c_3 η σταθερά ολοκλήρωσης, η οποία υπολογίζεται εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες: για t=0 έχομε y=0. Πράγματι, αντικαθιστώντας στην (ιη) έχομε: $0 = -\frac{1}{\gamma}\left[0 + \frac{1}{\gamma}(g+\gamma\upsilon_{oy})\right] + c_3$, άρα $c_3 = \frac{g+\gamma\upsilon_{oy}}{\gamma^2}$. Συνεπώς, η (ιη) γράφεται:

$$y = \frac{1}{\gamma^2}\left\{-\gamma gt + (g+\gamma\upsilon_{oy})(1-e^{-\gamma t})\right\}, \quad (ιθ)$$

η οποία όντως δίδει y=0 για t=0.

Στη περίπτωση μηδενικής αντίστασης, K=γ=0, η (ιθ) δίδει (χρησιμοποιώντας και τον κανόνα de l' Hospital δις):

$$\lim_{\gamma\to 0} y = \lim_{\gamma\to 0} \frac{-\gamma gt + (g+\gamma\upsilon_{oy})(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2} = \lim_{\gamma\to 0} \frac{-gt + \upsilon_{oy}(1-e^{-\gamma t}) + (g+\gamma\upsilon_{oy})te^{-\gamma t}}{2\gamma}$$

$$= \lim_{\gamma\to 0} \frac{\upsilon_{oy}te^{-\gamma t} + \upsilon_{oy}te^{-\gamma t} - (g+\gamma\upsilon_{oy})t^2e^{-\gamma t}}{2} = \upsilon_{oy}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$!!, δηλ. καταλήγουμε σε γνωστές σχέσεις.